УДК 510.5

О ПРЕДЕЛЬНОСТИ НАИБОЛЬШЕГО ЭЛЕМЕНТА ПОЛУРЕШЕТКИ РОДЖЕРСА

С. Ю. ПОДЗОРОВ*)

Одним из основных объектов изучения теории нумераций являются полурешетки Роджерса вычислимых нумераций. Долгое время внимание исследователей привлекали только так называемые Σ^0_1-вычислимые нумерации, однако в последнее время ситуация изменилась. После выхода работы Гончарова и Сорби [5] стали интенсивно изучаться Σ^0_n-вычислимые нумерации для произвольного $n \in \mathbb{N}$. В 2003 году опубликованы 3 больших обзорных статьи, посвященные этой теме [1, 2, 3].

Часть результатов, доказанных ранее для классического случая Σ^0_1-вычислимых нумераций, удалось перенести на обобщенный случай Σ^0_n-вычислимых нумераций для $n \geqslant 2$, однако для некоторых классических теорем вопрос о справедливости их аналогов в обобщенном случая остается открытым. К ним, в частности, относится теорема Хуторецкого [12, 7], утверждающая, что в полурешетке Роджерса над любым ненаибольшим элементом можно вложить линейный порядок, изоморфный первому неконструктивному ординалу. Из теоремы Хуторецкого, помимо прочего, следует, что наибольшей элемент полурешетки Роджерса Σ^0_1-вычислимых нумераций (если он существует) обладает свойством предельности, то есть не является минимальным накрытием никакого другого элемента. Справедлива или нет теорема Хуторецкого в обобщенном случае в настоящий момент не известно. Неизвестно также, справедливо ли ее следствие, утверждающее предельность главной нумерации.

В настоящей статье автор исследует вопрос о предельности наибольшего элемента полурешетки Роджерса Σ^0_n-вычислимых нумераций для $n \geqslant 2$ и

*)Работа выполнена при поддержке гранта INTAS 00-499 и гранта КЦФЕ PD02-1.1-475

находит ряд достаточных условий, при выполнение которых предельность имеет место. Переходим непосредственно к изложению.

Основные понятия, относящиеся к вычислимым функциям и множествам, можно найти в [10], к теории нумераций — в [7]. Мы предполагаем, что читателю они известны. Зафиксируем $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — универсальные вычислимые последовательности всех частичных вычислимых функций от одной переменной и рекурсивно перечислимых множеств. Для частичной функции f через δf мы обозначаем ее область определения, а через ρf — область значений.

Пусть $\mathbf{a}$ — произвольная T-степень, ν, μ — нумерации. Мы говорим, что ν $\mathbf{a}$-*сводится к* μ и пишем $\nu \leqslant_{\mathbf{a}} \mu$, если существует всюду определенная функция f, вычислимая с оракулом $\mathbf{a}$, такая что $\nu = \mu \circ f$. Для $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ имеем обычное понятие сводимости. Ясно, что для $\mathbf{a} \leqslant_T \mathbf{b}$ из $\nu \leqslant_{\mathbf{a}} \mu$ следует $\nu \leqslant_{\mathbf{b}} \mu$. Мы говорим, что нумерация μ *слабо сводится* к нумерации μ и пишем $\nu \leqslant_w \mu$, если существует вычислимая функция из $\mathbb{N}$ в множество конечных подмножеств $\mathbb{N}$, такая что для любого $x \in \mathbb{N}$ существует $y \in f(x)$, для которого $\nu x = \mu y$. Мы пишем $\nu \equiv_{\mathbf{a}} \mu$ ($\nu \equiv_w \mu$), если $\nu \leqslant_{\mathbf{a}} \mu$ и $\mu \leqslant_{\mathbf{a}} \nu$ ($\nu \leqslant_w \mu$ и $\mu \leqslant_w \nu$).

Нумерация ν называется *разрешимой*, если $\nu(\mathbb{N})$ конечно и множество $\{\langle x, y\rangle : \nu x = \nu y\}$ вычислимо. Легко показать (см. [7]), что для каждого конечного множества S существует единственная с точностью до эквивалентности разрешимая нумерация $\nu : \mathbb{N} \to S$, которая сводится ко всем нумерациям μ, таким что $S \subseteq \mu(\mathbb{N})$.

Если ν — нумерация и A — непустое рекурсивно перечислимое множество, то через ν_A обозначим нумерацию $\nu \circ f$, где f — всюду определенная вычислимая функция, такая что $\rho f = A$. Легко показать, что с точностью до эквивалентности нумерация ν_A не зависит от выбора функции f. Справедливы следующие свойства введенного обозначения: $\mu \leqslant \nu \Leftrightarrow$ существует рекурсивно перечислимое множество A, такое что $\mu \equiv \nu_A$; $\nu \equiv \nu_{\mathbb{N}}$ и $\nu_{A\cup B} \equiv \nu_A \oplus \nu_B$ (определение $\nu \oplus \mu$ см. ниже). Доказательство этих простых свойств есть, например, в [2].

До конца работы зафиксируем число $n \geqslant 2$. Пусть $\mathfrak{S}$ — непустое семейство Σ^0_n-подмножеств $\mathbb{N}$ и ν — нумерация $\mathfrak{S}$. Мы называем ν Σ^0_n-*вычислимой*, если множество $\{\langle x, y\rangle : x \in \nu y\}$ принадлежит классу Σ^0_n арифметической иерархии. Легко показать, что нумерация ν семейства $\mathfrak{S}$ является Σ^0_n-вычислимой тогда и только тогда, когда существует сильно $\mathbf{0}^{(n-1)}$ -вычислимое семейство $\{\nu^s x\}_{s,x\in\mathbb{N}}$ конечных множеств, такое что для всех x $\nu^0 x \subseteq \nu^1 x \subseteq \ldots$ и $\nu x = \bigcup_{s\in\mathbb{N}} \nu^s x$.

Свойство нумерации быть Σ^0_n-вычислимой наследуется вниз относительно $\mathbf{0}^{(n-1)}$-сводимости. Для $\mathfrak{S} \subseteq \Sigma^0_n$ множество всех Σ^0_n-вычислимых нумераций $\mathfrak{S}$ является предпорядком относительно сводимости. Ассоциированный с ним частичный порядок является верхней полурешеткой, которую мы называем *полурешеткой Роджерса* и обозначаем $\mathcal{R}^0_n(\mathfrak{S})$. Элемент $\mathcal{R}^0_n(\mathfrak{S})$, содержащий Σ^0_n-вычислимую нумерацию ν семейства $\mathfrak{S}$, мы обозначаем через $[\nu]$. Для Σ^0_n-вычислимых нумераций ν и μ элемент полурешетки Роджерса $[\nu \oplus \mu]$, является точной верхней гранью элементов $[\nu]$ и $[\mu]$, где $\nu \oplus \mu$ — такая нумерация, что для любого $x \in \mathbb{N}$

$$(\nu \oplus \mu)x = \begin{cases} \nu y, & x = 2y, \\ \mu y, & x = 2y+1. \end{cases}$$

Известно, что для произвольного $\mathfrak{S} \subseteq \Sigma^0_n$ полурешетка $\mathcal{R}^0_n(\mathfrak{S})$ либо пуста, либо одноэлементна, либо бесконечна, причем $\mathcal{R}^0_n(\mathfrak{S})$ одноэлементна тогда и только тогда, когда семейство $\mathfrak{S}$ одноэлементно (см [2]). В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что $\mathcal{R}^0_n(\mathfrak{S}) \neq \varnothing$ и что семейство $\mathfrak{S}$ содержит не менее двух элементов.

Для Σ^0_n-вычисмой нумерации ν семейства $\mathfrak{S}$ и $\mathbf{a} \leqslant_T \mathbf{0}^{(n-1)}$ через $[\nu]_{\mathbf{a}}$ мы обозначаем множество таких Σ^0_n-вычислимых нумераций μ семейства $\mathfrak{S}$, что $\nu \equiv_{\mathbf{a}} \mu$, и называем это множество $\mathbf{a}$-степенью нумерации μ. Ясно, что каждая $\mathbf{a}$-степень является объединением некоторого семейства элементов полурешетки Роджерса (для $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ это семейство одноэлементно). В связи с этим мы будем говорить также об $\mathbf{a}$-степенях элементов полурешетки Роджерса.

Нумерация ν семейства $\mathfrak{S}$ называется *минимальной*, если ν не разрешима и для любой нумерации μ семейства $\mathfrak{S}$, такой что $\mu \leqslant \nu$, либо $\mu \equiv \nu$, либо μ разрешима. Элемент полурешетки Роджерса назовем *минимальным*, если он состоит из минимальных нумераций. Легко показать, что если семейство $\mathfrak{S}$ конечно, то разрешимые нумерации $\mathfrak{S}$ Σ^0_n-вычислимы и образуют наименьший элемент в полурешетке $\mathcal{R}^0_n(\mathfrak{S})$. В этом случае минимальными элементами полурешетки Роджерса будут минимальные (относительно частичного порядка) элементы множества $\mathcal{R}^0_n(\mathfrak{S}) \setminus \{\bot\}$, где $\bot$ — наименьший элемент в $\mathcal{R}^0_n(\mathfrak{S})$. Если же $\mathfrak{S}$ бесконечно, то для элемента $\mathcal{R}^0_n(\mathfrak{S})$ свойства "быть минимальным в полурешетке" и "быть минимальным относительно частичного порядка" равносильны. Можно показать [1, 2], что в $\mathcal{R}^0_n(\mathfrak{S})$ всегда существует бесконечно много минимальных элементов.

Для $a, b \in \mathcal{R}_n^0(\mathfrak{S})$ мы говорим, что b является *минимальным накрытием* a, если $a < b$ и $\{x \in \mathcal{R}_n^0(\mathfrak{S}) : a \leqslant x \leqslant b\} = \{a, b\}$. Мы говорим, что b является *строго минимальным накрытием* a, если $a < b$ и $\{x \in \mathcal{R}_n^0(\mathfrak{S}) : x \leqslant b\} = \{x \in \mathcal{R}_n^0(\mathfrak{S}) : x \leqslant a\} \cup \{b\}$. Будем называть элемент a полурешетки $\mathcal{R}_n^0(\mathfrak{S})$ *предельным*, если для любого $b \in \mathcal{R}_n^0(\mathfrak{S})$, такого что $b < a$, существует $c \in \mathcal{R}_n^0(\mathfrak{S})$, для которого $b < c < a$. Ясно, что элемент является предельным тогда и только тогда, когда он не является минимальным накрытием никакого другого элемента. Нумерацию, принадлежащую наибольшему элементу полурешетки Роджерса (если такой элемент существует) мы называем *главной*.

Нумерация ν семейства $\mathfrak{S}$ называется *полной*, если существует $s \in \mathfrak{S}$, такой что для любой частичной вычислимой функции f существует всюду определенная вычислимая функция g, для которой

$$\nu g(x) = \begin{cases} \nu f(x), & \text{если } x \in \delta f; \\ s, & \text{если } x \notin \delta f; \end{cases}$$

при всех $x \in \mathbb{N}$. Легко показать, что если ν — полная нумерация и $\mu \equiv \nu$, то μ также полна. В [1] доказано, что для любой Σ_n^0-вычислимой нумерации ν семейства $\mathfrak{S}$ существует полная Σ_n^0-вычислимая нумерация $\mathfrak{S}$, такая что $\nu \leqslant \mu$. Отсюда сразу следует, что главная нумерация всегда является полной. В [7] доказан следующий факт: если нумерация ν полна и $\nu \equiv \nu_1 \oplus \nu_2$, то $\nu \equiv \nu_1$ или $\nu \equiv \nu_2$. Там же доказано, что полные нумерации являются цилиндрическими (то есть если ν полна, то существует вычислимая функция f, такая что для любых $x, t, s \in \mathbb{N}$ $f(x,t) = f(x,s) \Leftrightarrow t = s$ и $\nu f(x,t) = \nu x$).

В работе [9] доказано, что если $a \in \mathcal{R}_n^0(\mathfrak{S})$ не принадлежит наибольшей $\mathbf{0}'$-степени, то для произвольной лахлановской полурешетки $\mathfrak{L}$ (определение см. там же) существует $b \in \mathcal{R}_n^0(\mathfrak{S})$ для которого интервал $[a, b] = \{x \in \mathcal{R}_n^0(\mathfrak{S}) : a \leqslant x \leqslant b\}$ изоморфен $\mathfrak{L}$. Так как класс лахлановских полурешеток достаточно широк (можно показать, что он содержит все дистрибутивные решетки с нулем и единицей, имеющие Σ_3^0-представление), то наибольший элемент полурешетки Роджерса является предельным тогда и только тогда, когда он пределен как элемент наибольшей $\mathbf{0}'$-степени. К сожалению, никакая $\mathbf{0}'$-степень не может быть одноэлементной (в той же работе доказано, что любая $\mathbf{0}'$-степень содержит произвольную лахлановскую полурешетку в качестве идеала).

Переходим к доказательству первого достаточного условия предельности наибольшего элемента.

Теорема 1 *Если семейство $\mathfrak{S}$ содержит наименьший по включению элемент, то наибольший элемент полурешетки $\mathcal{R}^0_n(\mathfrak{S})$ (в случае, когда он существует) является предельным.*

Доказательство. Полное бинарное дерево (то есть множество конечных последовательностей из 0 и 1) обозначим через $2^{<\omega}$, а множество ветвей полного бинарного дерева (то есть бесконечных последовательностей из 0 и 1) — через 2^ω. Для $\tau \in 2^{<\omega}$ $|\tau|$ обозначает длину последовательности τ. Последовательность нулевой длины обозначим через Λ. Через $\tau * \sigma$ обозначается конкатенация последовательностей τ и σ. Для $\tau \in 2^{<\omega}$, $\sigma \in 2^{<\omega} \cup 2^\omega$ мы пишем $\tau \preccurlyeq \sigma$, если существует $\varepsilon \in 2^{<\omega} \cup 2^\omega$, такая что $\sigma = \tau * \varepsilon$. Если $\sigma \in 2^\omega$ и $i \in \mathbb{N}$, то через σ_i мы обозначаем такую последовательность $\tau \in 2^{<\omega}$, что $|\tau| = i$ и $\tau \preccurlyeq \sigma$. Для $\tau, \sigma \in 2^{<\omega} \cup 2^\omega$ мы говорим, что τ *меньше* или *левее*, чем σ, и пишем $\tau < \sigma$, если существует $\varepsilon \in 2^{<\omega}$, такая что $\varepsilon * 0 \preccurlyeq \tau$ и $\varepsilon * 1 \preccurlyeq \sigma$.

Пусть есть отображение, сопоставляющее каждому элементу $\tau \in 2^{<\omega}$ подмножество натурального ряда S_τ. Тогда через S^*_τ мы обозначаем множество $\bigcup\{S_\sigma : \sigma \in 2^{<\omega} \,\&\, \tau \preccurlyeq \sigma\}$. Под *китайской системой* мы понимаем тройку $\langle\{S_\tau : \tau \in 2^{<\omega}\}, \sigma, U\rangle$, такую что

1. для $\tau \in 2^{<\omega}$ S_τ — вычислимое подмножество натурального ряда, $\sigma \in 2^\omega$, U — рекурсивно перечислимое множество;

2. если $\tau \neq \sigma$, то $S_\tau \cap S_\sigma = \varnothing$; $\bigcup\{S_\tau : \tau \in 2^{<\omega}\} = \mathbb{N}$;

3. для $\tau \in 2^{<\omega}$ если $\tau < \sigma$, то множество S^*_τ конечно; если $\tau > \sigma$, то $S_\tau \subseteq U$; если же $\tau \preccurlyeq \sigma$, то множество S_τ бесконечно, а множество $S_\tau \cap U$ конечно;

4. для $i \in \mathbb{N}$ множество $S^*_{\sigma_i}$ рекурсивно перечислимо;

5. для $i \in \mathbb{N}$ либо $S^*_{\sigma_{i+1}} \subseteq W_i$, либо $S^*_{\sigma_{i+1}} \cap W_i \subseteq U$;

6. для $\tau \in 2^\omega$ если $n^0_\tau < n^1_\tau < \ldots$ — "прямой пересчет" множества S_τ (в случае, когда множество S_τ конечно, числа n^k_τ не определены при k большем чем число элементов множества S_τ), то отношения "n^k_τ определено" и "$x = n^k_\tau$" разрешимы с оракулом $\mathbf{0}'$.

В теории вычислимости известны конструкции с так называемыми "китайскими ящиками", которые приводят к построению китайских систем с различными дополнительными свойствами. Примеры можно найти в [8, 6, 4, 11]. Примем без доказательства, но со ссылкой на перечисленные источники, что китайские системы существует. Если читатель все же сомневается в их существовании, то он может, для примера, изучить первую часть доказательства теоремы 3 в работе [4], а потом взять в качестве S_τ множество $S^1_\tau \cup S^2_\tau$ (обозначения взяты из указанной работы).

Зафиксируем китайскую систему $\langle \{S_\tau : \tau \in 2^{<\omega}\}, \sigma, U \rangle$. Пусть a, b — элементы $\mathcal{R}^0_n(\mathfrak{S})$, такие что $a < b$ и для Σ^0_n-вычислимых нумераций α, β семейства $\mathfrak{S}$ $a = [\alpha]$ и $b = [\beta]$. Зафиксируем сильно $\mathbf{0}^{(n-1)}$-вычислимые последовательности конечных множеств $\alpha^0 x \subseteq \alpha^1 x \subseteq \ldots$ и $\beta^0 x \subseteq \beta^1 x \subseteq \ldots$, такие что $\alpha x = \bigcup_{s \in \mathbb{N}} \alpha^s x$ и $\beta x = \bigcup_{s \in \mathbb{N}} \beta^s x$ для любого $x \in \mathbb{N}$. Построим нумерацию γ семейства $\mathfrak{S}$, такую что $[\gamma]$ — минимальный элемент полурешетки $\mathcal{R}^0_n(\mathfrak{S})$, не сводимый к a.

Будем строить нумерацию γ по шагам. На шаге s будем определять для каждого $x \in \mathbb{N}$ конечное множество $\gamma^s x$. После исполнения всех шагов положим $\gamma x = \bigcup_{s \in \mathbb{N}} \gamma^s x$. Наша конструкция эффективна с оракулом $\mathbf{0}^{(n-1)}$, так что каждое из множеств $\gamma^s x$ будет сильно вычислимо с этим оракулом. Кроме того, построенное нами семейство конечных множеств будет удовлетворять следующим трем свойствам:

1. для всех $x, s \in \mathbb{N}$ $\gamma^s x \subseteq \gamma^{s+1} x$;

2. для любого $x \in \mathbb{N}$ существует $y \in \mathbb{N}$, такой что почти для всех s $\gamma^s x = \beta^s y$;

3. для любого $y \in \mathbb{N}$ существует $x \in \mathbb{N}$, такой что почти для всех s $\gamma^s x = \beta^s x$;

так что γ окажется Σ^0_n-вычислимой нумерацией семейства $\mathfrak{S}$.

Нам понадобится "счетчик", показывающий наличие сводимости γ к α. Пусть

$$
\begin{aligned}
c'(i,t) = \max\bigl\{ s \leqslant t : (\forall n < s)(\forall x < s)[n \in \delta f_i \\
\& \ (x \in \alpha^t f_i(n) \leftrightarrow x \in \gamma^t n)] \bigr\},
\end{aligned}
$$

а $c(i,t) = \max\{c'(i,0), c'(i,1), \ldots, c'(i,t)\}$. Легко видеть, что $c(i,t)$ — всюду определенная $\mathbf{0}^{(n-1)}$-вычислимая функция, возрастающая по второму аргументу, для которой $\lim_{t \to \infty} c(i,t) = \infty$ тогда и только тогда, когда $\gamma = \alpha f_i$.

Без ограничения общности можно считать, что $\beta 0$ — наименьший по включению элемент семейства $\mathfrak{S}$ и что каждый элемент $\mathfrak{S}$ имеет в нумерации β бесконечно много номеров. Дадим описание шагов конструкции.

Шаг 0. Для всех $x \in \mathbb{N}$ полагаем $\gamma^0 x = \beta^0 0$. На все натуральные числа поставим метку $\langle 0 \rangle$.

Шаг $s+1$. Найдем минимальное число x, такое что $x \in S_\tau \setminus U$ для некоторой последовательности τ длины $> s$ и поставим на x метку $\langle s+1 \rangle$. После этого для всех $i \leqslant s$, для всех τ, таких что $|\tau| = i$ и для всех $k \leqslant c(i,s)$ если число n^k_τ определено, не принадлежит U и на нем стоит метка $\langle 0 \rangle$, то поставим на n^k_τ метку $\langle k \rangle$. В заключении для каждого $x \in \mathbb{N}$ полагаем $\gamma^{s+1}x = \gamma^s x \cup \beta^{s+1}k$, где $\langle k \rangle$ — метка, которая стоит на x.

Из определения китайской системы и описания конструкции видно, что семейство конечных множеств $\{\gamma^s x\}_{s,x\in\mathbb{N}}$ действительно удовлетворяет введенным выше трем свойствам и, следовательно, γ является Σ^0_n-вычислимой нумерацией семейства $\mathfrak{S}$. Если $\gamma \leqslant \alpha$, то для некоторого $i \in \mathbb{N}$ $\lim_{t\to\infty} c(i,t) = \infty$, почти для всех $k \in \mathbb{N}$ $\gamma n^k_{\sigma_i} = \beta k$ и $\beta \leqslant \gamma \leqslant \alpha$, чего не может быть в силу выбора α и β. Значит, $\gamma \not\leqslant \alpha$, для всех $i \in \mathbb{N}$ $\lim_{t\to\infty} c(i,t) < \infty$ и для каждого $\tau \in 2^{<\omega}$ почти для всех $k \in \mathbb{N}$ $\gamma n^k_\tau = \beta 0$. Следовательно, для всех τ γ_{S_τ} — разрешимая нумерация некоторого конечного подсемейства $\mathfrak{S}$. Покажем, что γ — минимальный элемент полурешетки $\mathcal{R}^0_n(\mathfrak{S})$. Так как $\gamma \not\leqslant \alpha$, то нумерация γ не может быть разрешимой. Пусть $\delta \leqslant \gamma$. Тогда $\delta \equiv \gamma_{W_i}$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$. Имеем $\mathbb{N} = U \cup B \cup C \cup D$, где $B = S^*_{\sigma_{i+1}}$, $C = \bigcup_{j\leqslant i} S_{\sigma_j}$, а D — конечное множество, равное $\bigcup_{\tau<\sigma_{i+1}} S_\tau$. В связи со сказанным выше γ_C — разрешимая нумерация. По построению $\gamma(U) = \{\beta 0\}$. Получаем $\gamma \equiv \gamma_U \oplus \gamma_B \oplus \gamma_C \oplus \gamma_D \equiv \gamma_B$. Теперь если $B \subseteq W_i$, то $\gamma \equiv \gamma_B \leqslant \gamma_{W_i} \equiv \delta \leqslant \gamma$ и $\delta \equiv \gamma$. Если же $B \cap W_i \subseteq U$, то $\delta \equiv \gamma_{W_i} \equiv \gamma_{U\cap W_i} \oplus \gamma_{B\cap W_i} \oplus \gamma_{C\cap W_i} \oplus \gamma_{D\cap W_i}$ — разрешимая нумерация некоторого конечного подсемейства $\mathfrak{S}$.

В заключении предположим, что b — наибольший элемент полурешетки $\mathcal{R}^0_n(\mathfrak{S})$ и $a < b$. Тогда, по доказанному, в $\mathcal{R}^0_n(\mathfrak{S})$ существует минимальный элемент c, не сводимый к a. Имеем $a < a \cup c \leqslant b$. Равенство $a \cup c = b$ не может выполняться из-за полноты главных нумераций. □

Следствие 1 *Если a — не наибольший и не наименьший элемент полурешетки $\mathcal{R}^0_n(\mathfrak{S})$, то в этой полурешетке существует минимальный элемент, несравнимый с a.*

Доказательство. Существование такого элемента было установлено в ходе доказательства теоремы 1. $\square$

Следствие 2 *Если семейство $\mathfrak{S}$ конечно, то в полурешетке $\mathcal{R}^0_n(\mathfrak{S})$ наибольший элемент является предельным.*

Доказательство. Если $\mathfrak{S}$ содержит наименьший по включению элемент, то это прямо следует из теоремы 1. Если же в $\mathfrak{S}$ нет элемента, наименьшего по включению, то, как показано в [4], в полурешетке $\mathcal{R}^0_n(\mathfrak{S})$ вообще нет наибольшего элемента. $\square$

В связи с доказанной теоремой возникает естественный вопрос: верно ли, что если в $\mathcal{R}^0_n(\mathfrak{S})$ существует наибольший элемент, то в $\mathfrak{S}$ существует элемент, наименьший по включению? Ответ на этот вопрос автору неизвестен. Если бы это оказалось так, то тогда теорема 1 полностью решала бы вопрос о предельности наибольшего элемента полурешетки $\mathcal{R}^0_n(\mathfrak{S})$.

Можно привести множество достаточных условий несуществования наибольшего элемента в полурешетке Роджерса. Так, например, в [7] доказано утверждение, непосредственная релятивизация которого дает следующий результат: если в $\mathcal{R}^0_n(\mathfrak{S})$ существует наибольшая $\mathbf{0}^{(n-1)}$-степень, то объединение любого направленного подсемейства $\mathfrak{S}$ ($\mathfrak{S}' \subseteq \mathfrak{S}$ *направлено*, если для любых $s_1, s_2 \in \mathfrak{S}'$ существует $s \in \mathfrak{S}'$, такой что $s_1 \cup s_2 \subseteq s$), обладающего Σ^0_n-вычислимой нумерацией, должно лежать в $\mathfrak{S}$. Поскольку $\mathbf{0}^{(n-1)}$-степень наибольшего элемента полурешетки Роджерса всегда является наибольшей, то из этого, в частности, следует, что для $\mathfrak{S} = \{D \subseteq \mathbb{N} : D \text{ конечно}\}$ и $\mathfrak{S} = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ рекурсивно перечислимо}\}$ в $\mathcal{R}^0_n(\mathfrak{S})$ нет наибольшего элемента.

Следующая теорема основана на другом достаточном условии несуществования главной нумерации.

Теорема 2 *Наибольший элемент полурешетки $\mathcal{R}^0_n(\mathfrak{S})$ является предельным при выполнении любого из следующих двух условий:*

1. *семейство $\mathfrak{S}$ содержит конечное множество;*

2. *семейство $\mathfrak{S}$ обладает Σ^0_{n-1}-вычислимой нумерацией.*

Доказательство. Если семейство $\mathfrak{S}$ содержит наименьший по включению элемент, то предельность наибольшего элемента $\mathcal{R}^0_n(\mathfrak{S})$ следует из теоремы 1. Предположим, что в $\mathfrak{S}$ нет элемента, наименьшего по включению.

Будем говорить, что Σ^0_n-вычислимая нумерация семейства $\mathfrak{S}$ обладает свойством $(*)$, если существует $\mathbf{0}^{(n-1)}$-вычислимая всюду определенная функция f, такая что для любого $x \in \mathbb{N}$ $\nu x \neq \nu f(x)$. В работе [4] показано, что если Σ^0_n-вычислимая нумерация ν обладает свойством $(*)$, то для $[\nu]$ в полурешетке $\mathcal{R}^0_n(\mathfrak{S})$ существует минимальное накрытие. В частности, $[\nu]$ не может быть наибольшим. Рассмотрим теперь отдельно каждый из случаев.

Случай 1. Пусть F — конечное множество, принадлежащее $\mathfrak{S}$. Пусть $G = \{x \in F : (\forall s \in \mathfrak{S})(x \in s)\}$. Так как в $\mathfrak{S}$ нет множества, наименьшего по включению, то $G \notin \mathfrak{S}$.

Пусть ν — произвольная Σ^0_n-вычислимая нумерация $\mathfrak{S}$. Для каждого $x \in F \setminus G$ выберем $y_x \in \mathbb{N}$, такой что $x \notin \nu y_x$. Пусть $y \in \mathbb{N}$ таково, что $\nu y = F$. Определим функцию f так: для каждого $z \in \mathbb{N}$ перечисляем νz с оракулом $\mathbf{0}^{(n-1)}$ и если в перечислении появился элемент $\notin F$, то полагаем $f(z) = y$, а если появился $x \in F \setminus G$, то полагаем $f(z) = y_x$. Легко видеть, что f — всюду определенная $\mathbf{0}^{(n-1)}$-вычислимая функция и $\nu x \neq \nu f(x)$ для любого $x \in \mathbb{N}$. Следовательно, нумерация $[\nu]$ удовлетворяет условию $(*)$, а так ν произвольно, то в $\mathcal{R}^0_n(\mathfrak{S})$ нет наибольшего элемента.

Случай 2. Пусть μ — некоторая Σ^0_{n-1}-вычислимая нумерация семейства $\mathfrak{S}$. Тогда отношение "$x \in \mu y$" вычислимо с оракулом $\mathbf{0}^{(n-1)}$. Пусть ν — произвольная Σ^0_n-вычислимая нумерация семейства $\mathfrak{S}$. Определим функцию f так: для произвольного $z \in \mathbb{N}$ перечисляем $(\mu \oplus \nu)z$ с оракулом $\mathbf{0}^{(n-1)}$ и для каждого из элементов, появившихся в перечислении, ищем $y \in \mathbb{N}$, для которого этот элемент $\notin \mu y$. Поскольку в $\mathfrak{S}$ нет наименьшего по включению множества, то такой y всегда найдется. Как только такой y нашелся, полагаем $f(z) = 2y$. Легко видеть, что функция f всюду определена, вычислима с оракулом $\mathbf{0}^{(n-1)}$ и $(\mu \oplus \nu)z \neq (\mu \oplus \nu)f(z)$ для любого $z \in \mathbb{N}$. Следовательно, нумерация $\mu \oplus \nu$ обладает свойством $(*)$ и, в силу произвольности выбора ν, в $\mathcal{R}^0_n(\mathfrak{S})$ нет наибольшего элемента. □

Закончим эту работу теоремой, которая связывает вопрос о предельности наибольшего элемента полурешетки Роджерса с понятием слабой сводимости.

Теорема 3 *Пусть ν — Σ^0_n-вычислимая нумерация семейства $\mathfrak{S}$, μ — главная Σ^0_n-вычислимая нумерация $\mathfrak{S}$ и в полурешетке $\mathcal{R}^0_n(\mathfrak{S})$ $[\mu]$ является минимальным накрытием $[\nu]$. Тогда $\mu \leqslant_w \nu$.*

Доказательство. Пусть ν и μ — такие, как в условии теоремы. Тогда $\mu \nleqslant \nu$ и для любой вычислимой всюду определенной функции f имеем

$\mu x \neq \nu f(x)$ для некоторого $x \in \mathbb{N}$. Покажем, что для любого иммунного $\mathbf{0}^{(n-1)}$-вычислимого множества X существует вычислимая всюду определенная вычислимая функция f, такая что $\mu x = \nu f(x)$ для всех $x \in X$.

Предположим противное и пусть $X \subseteq \mathbb{N}$ — иммунное $\mathbf{0}^{(n-1)}$-вычислимое множество, такое что для любой всюду определенной вычислимой функции f $\mu x \neq \nu f(x)$ для некоторого $x \in X$. Нумерация μ главная, а, значит, полная и цилиндрическая. Зафиксируем вычислимую всюду определенную функцию φ, такую что при $t \neq s$ для любого $x \in \mathbb{N}$ $\varphi(x,t) \neq \varphi(x,s)$ и $\mu x = \mu\varphi(x,t)$. Пусть c — вычислимая функция, взаимно однозначно отображающая $\mathbb{N}^2$ на $\mathbb{N}$.

Построим нумерацию γ. Построение будет вестись по шагам. На каждом шаге будем определять значение нумерации γ на некоторых натуральных числах либо через нумерацию μ, либо через нумерацию ν. Конструкция эффективна с оракулом $\mathbf{0}^{(n-1)}$, так что нумерация γ окажется Σ^0_n-вычислимой. На всех шагах, кроме нулевого, будем определять γ на конечном числе аргументов.

<u>Шаг 0</u>. Полагаем $\gamma x = \mu x$ для всех $x \in X$.

<u>Шаг $2s+1$</u>. Пусть $s = c(i,x)$. Ищем минимальное y, такое что либо $\varphi(x,y) \notin \delta f_i$, либо $f_i(\varphi(x,y)) = f_i(\varphi(x,y'))$ для некоторого $y' < y$, либо $\gamma f_i(\varphi(x,y))$ еще не определено. Так как X иммунно, то такой y найдется. В первых двух случаях ничего не делаем. В третьем случае полагаем $\gamma f_i(\varphi(x,y)) = \nu x$.

<u>Шаг $2s+2$</u>. Ищем минимальное z, такое что γz еще не определено, и полагаем $\gamma z = \nu s$.

Нумерация γ определена. Из наличия четных шагов следует, что γ — нумерация всего семейства $\mathfrak{S}$. Так как $\gamma x = \mu x$ для всех $x \in X$, то в силу выбора X $\gamma \nleqslant \nu$. Предположим, что $\mu \leqslant \gamma$. Тогда нумерация γ является главной, а, значит, полной и цилиндрической. Следовательно, существует разнозначная всюду определенная функция f, такая что $\mu = \gamma \circ f$ (см. [7]). Пусть $f = f_i$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$. Из описания шагов с номерами $2c(i,x)+1$ следует, что для каждого $x \in \mathbb{N}$ существует $y_x \in \mathbb{N}$, такой что $\gamma f(\varphi(x,y_x)) = \nu x$. Получаем $\mu x = \mu\varphi(x,y_x) = \gamma f(\varphi(x,y_x)) = \nu x$ для любого $x \in \mathbb{N}$. Однако $\nu \neq \mu$; противоречие.

Таким образом, $\mu \nleqslant \gamma$. Из полноты нумерации μ получаем, что $\nu \oplus \gamma < \mu$. Так как $\gamma \nleqslant \nu$, то $\nu < \nu \oplus \gamma$ и $[\mu]$ — не минимальное накрытие для $[\nu]$. Из этого противоречия окончательно выводим, что для любого иммунного $\mathbf{0}^{(n-1)}$-вычислимого множества X существует вычислимая функция f, для которой $\mu x = \nu f(x)$ при всех $x \in X$.

Пусть теперь f — такая 2-местная функция, что $f(k, i) = \min\{t > k : W_i \subseteq \{0, \ldots, t\}$ или множество $W_i \cap \{k+1, \ldots, t\}$ содержит ровно два элемента$\}$, а g — 1-местная функция, такая что $g(0) = 0$ и $g(t+1) = f(g(t), t)$ для всех $t \in \mathbb{N}$. Ясно, что функции f и g $\mathbf{0}'$-вычислимы и что $g(0) < g(1) < \ldots$. Следовательно, множество $X = \rho g$ $\mathbf{0}'$-вычислимо. Легко проверить, что как само множество X, так и его дополнение иммунны.

Пусть теперь f_1 и f_2 — такие вычислимые всюду определенные функции, что $\mu x = \nu f_1(x)$ и $\mu y = \nu f_2(y)$ для всех $x \in X$ и $y \in \mathbb{N} \setminus X$. Получаем, что для любого $x \in \mathbb{N}$ $\mu x \in \{\nu f_1(x), \nu f_2(x)\}$ и, следовательно, $\mu \leqslant_w \nu$. $\Box$

Следствие 3 *Если главная Σ^0_n-вычислимая нумерация семейства $\mathfrak{S}$ слабо не сводится к неглавным Σ^0_n-вычислимым нумерациям того же семейства, то наибольший элемент полурешетки $\mathcal{R}^0_2(\mathfrak{S})$ является предельным.*

Про слабую сводимость пока мало что известно. Ясно, что если семейство $\mathfrak{S}$ конечно, то любые две нумерации $\mathfrak{S}$ (не обязательно Σ^0_n-вычислимые) слабо сводятся друг к другу. Ясно также, что обычная сводимость влечет слабую сводимость. Другие свойства слабой сводимости нуждаются в специальном исследовании.

Список литературы

[1] Badaev, S. A., Goncharov, S. S., Sorbi, A., Completeness and Universality of Arithmetical Numberings, *Computability and Models*, 11 - 44, Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2003.

[2] Badaev, S. A., Goncharov, S. S., Podzorov, S. Yu., Sorbi, A., Algebraic properties of Rogers semilattices of arithmetical numberings, *Computability and Models*, 45 - 77, Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2003.

[3] Badaev, S. A., Goncharov, S. S., Sorbi, A., Isomorphism Types and Theories of Rogers Semilattices of Arithmetical Numberings, 79 - 91, Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2003.

[4] Бадаев, С. А., Подзоров, С. Ю., Минимальные накрытия в полурешетках Роджерса Σ^0_n-вычислимых нумераций, *Сиб. Мат. Ж.*, **43**, No. 4, 769 – 778, 2002.

[5] Гончаров, С. С., Сорби, А., Обобщенно вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса, *Алгебра и Логика*, **36**, No. 6, 621 – 641, 1997.

[6] Дегтев., А. Н., *Рекурсивно перечислимые множества и сводимости табличного типа*, Наука, Физматлит, Москва, 1998.

[7] Ершов, Ю. Л., *Теория нумераций*, Наука, Москва, 1977.

[8] Lachlan, A. H., Two theorems on many-one degrees of recursively enumerable sets, *Алгебра и Логика*, **11**, No. 2, 216 – 229, 1972.

[9] Подзоров С. Ю., О локальном строении полурешеток Роджерса Σ^0_n-вычислимых нумераций, *Алгебра и Логика*, сдана в печать.

[10] Роджерс, Х., *Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость*, Мир, Москва, 1972.

[11] Соар, Р. И., *Вычислимо перечислимые множества и степени*, "Казанское математическое общество", Казань, 2000.

[12] Хуторецкий, А. Б., О мощности верхней полурешетки вычислимых нумераций, *Алгебра и Логика*, **10**, No. 5, 561 – 569, 1971.