УДК 510.5

О ЛОКАЛЬНОМ СТРОЕНИИ ПОЛУРЕШЕТОК РОДЖЕРСА Σ^0_n-ВЫЧИСЛИМЫХ НУМЕРАЦИЙ

С. Ю. ПОДЗОРОВ*)

Понятие Σ^0_n-вычислимой нумерации является обобщением понятия вычислимой нумерации — классического объекта теории нумераций (вычислимыми нумерациями в традиционном понимании этого термина являются в точности Σ^0_1-вычислимые нумерации). Систематическое изучение Σ^0_n-вычислимых нумераций для $n \geqslant 2$ началось в работе С. С. Гончарова и А. Сорби [3], в которой было доказано, что все неодноэлементные полурешетки Роджерса таких нумераций бесконечны и не являются решетками.

С момента выхода этой статьи большое внимание уделялось изучению алгебраических свойств полурешеток Роджерса Σ^0_n-вычислимых нумераций для $n \geqslant 2$, особенно вопросам их локального строения (типы изоморфизма интервалов и начальных сегментов таких полурешеток). Так, в [1] было доказано, что каждая такая полурешетка для бесконечного семейства содержит бесконечно много минимальных элементов и содержит безатомный идеал в случае, когда семейство обладает Σ^0_n-вычислимой фридберговой нумерацией. Далее в [7] автор показал, что в каждую нетривиальную полурешетку Роджерса Σ^0_n-вычислимых нумераций для $n \geqslant 2$ можно вложить идеал, изоморфный $\mathcal{E}^*$ — фактор-решетке рекурсивно перечислимых множеств по модулю конечных множеств (без наименьшего элемента в случае, когда нумеруемое семейство бесконечно). В статье [2] также доказано, что для произвольного элемента α полурешетки Роджерса, который не является наибольшим относительно $0'$-сводимости, существует элемент β этой же полурешетки, такой что интервал $[\alpha, \beta]$ изоморфен $\mathcal{E}^*$. В этой же статье доказано, что для произвольной нумерации α, которая не является наибольшей в полурешетке Роджерса относительно $0''$-сводимости и для любого рекурсивно перечислимого множества A найдется нумерация β из указанной полурешетки, такая что интервал

*)Работа выполнена при частичной поддержке гранта INTAS 00-499, гранта "Университеты России"УР.04.01.013 и гранта КЦФЕ PD02-1.1-475

$[\alpha, \beta]$ изоморфен $\mathcal{E}_A^*$ — фактор-решетке рекурсивно перечислимых надмножеств A по модулю конечных множеств. Впоследствии автору этой статьи удалось усилить последний результат: было доказано, что в его формулировке $0''$-сводимость можно заменить на $0'$-сводимость и что, кроме того, для произвольного рекурсивно перечислимого множества A в каждой нетривиальной полурешетке Роджерса Σ_n^0-вычислимых нумераций для $n \geqslant 2$ найдется идеал, изоморфный $\mathcal{E}_A^*$ (без наименьшего элемента, если нумеруемое семейство бесконечно).

В 1972 году А. Лахлан [6] предложил описание верхних полурешеток, которые являются главными идеалами в полурешетке рекурсивно перечислимых m-степеней. Из указанной работы следует, что класс таких полурешеток (которые мы будем называть лахлановскими полурешетками) достаточно "широк"; в частности, он содержит все дистрибутивные решетки, имеющие Σ_3^0-представление (и, следовательно, все решетки вида $\mathcal{E}_A^*$ для произвольного рекурсивно перечислимого A).

Основным результатом данной статьи являются следующие два утверждения:

1. Для произвольной лахлановской полурешетки $\mathcal{L}$ в нетривиальной полурешетке Роджерса Σ_n^0-вычислимых нумераций для $n \geqslant 2$ найдется идеал, изоморфный $\mathcal{L}$ (без наименьшего элемента, если нумеруемое семейство бесконечно).

2. Для произвольной лахлановской полурешетки $\mathcal{L}$ и для произвольного элемента α полурешетки Роджерса Σ_n^0-вычислимых нумераций при $n \geqslant 2$, который не является наибольшим относительно $0'$-сводимости, найдется Σ_n^0-вычислимая нумерация β того же семейства, для которой интервал $[\alpha, \beta]$ изоморфен $\mathcal{L}$.

Все доказанные ранее результаты, которые перечислены во введении, являются следствиями этих двух утверждений.

§ 1. Основные определения и обозначения.

Основные понятия, относящиеся к вычислимым функциям и множествам, можно найти в [8], к теории нумераций — в [5]. Мы предполагаем, что читателю они известны.

Для частичной функции f через δf мы обозначаем ее область определения, через ρf — область значений.

Зафиксируем $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ и $\{W_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — универсальные вычислимые последовательности всех частичных вычислимых функций от одной переменной и рекурсивно перечислимых множеств. Зафиксируем также $\{W_i^s\}_{i,s \in \mathbb{N}}$ и $\{f_i^s\}_{i,s \in \mathbb{N}}$ — двойные сильно вычислимые последовательности конечных множеств и функций, такие что для любого i $W_i^0 \subseteq W_i^1 \subseteq \ldots$, $f_i^0 \subseteq f_i^1 \subseteq \ldots$, $\bigcup_{s \in \mathbb{N}} W_i^s = W_i$ и $\bigcup_{s \in \mathbb{N}} f_i^s = f_i$. Пусть для $i \in \mathbb{N}$ $H_i = \{x : [i/2^x] - 2 \cdot$

$[i/2^{x+1}] = 1\}$ (здесь $[q]$ — целая часть рационального числа q). Последовательность $\{H_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — каноническая сильно вычислимая последовательность всех конечных множеств.

Говоря об m-степенях, мы отождествляем степени множеств $\emptyset, \mathbb{N}$ с другими вычислимыми степенями и считаем, что в полурешетке m-степеней существует наименьший элемент, состоящий из вычислимых множеств.

Пусть U — произвольное подмножество $\mathbb{N}$, A — непустое рекурсивно перечислимое множество. Через $\psi_U(A)$ мы обозначаем m-степень множества $f^{-1}(U)$, где f — всюду определенная вычислимая функция, для которой $\rho f = A$. Ясно, что эта степень не зависит от выбора f. Отметим следующие четыре свойства оператора ψ:

1. $\psi_U(A) \leqslant_m U$;
2. $X \leqslant_m U \Rightarrow X \equiv_m \psi_U(A)$ для некоторого A;
3. $\psi_U(A_1 \cup A_2) = \psi_U(A_1) \cup \psi_U(A_2)$;
4. если разность $A_1 \setminus A_2$ конечна, то $\psi_U(A_1) \leqslant_m \psi_U(A_2)$.

Пусть $\mathcal{L}$ — не более чем счетная верхняя полурешетка с наибольшим и наименьшим элементами. Мы называем полурешетку $\mathcal{L}$ *лахлановской*, если существует последовательность $\langle D_0, \leqslant_0\rangle, \langle D_1, \leqslant_1\rangle, \ldots$ конечных предупорядоченных множеств, такая что:

1. $D_0 \subseteq D_1 \subseteq \ldots$ — сильно вычислимая последовательность конечных подмножеств $\mathbb{N}$, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i = \mathbb{N}$;
2. для $i \in \mathbb{N}$ $\{0,1\} \subseteq D_i$, $0 <_i 1$, для всех $x \in D_i$ $0 \leqslant_i x \leqslant_i 1$;
3. $x \leqslant_i y$ является Π^0_2-отношением между x, y и i;
4. для всех $i \in \mathbb{N}$ ассоциированное с $\langle D_i, \leqslant_i\rangle$ частично упорядоченное множество является дистрибутивной решеткой;
5. для $i \in \mathbb{N}$ и $x, y \in D_i$ $x \leqslant_i y$ влечет $x \leqslant_{i+1} y$, отображение частичных порядков, определяемое вложением $D_i \subseteq D_{i+1}$, сохраняет точные верхние грани;
6. существуют вычислимые трехместные функции $u(x, y, i)$ и $v(x, y, i)$, такие что для $x, y \in D_i$ значения этих функций на x, y и i также принадлежат D_i и функции u, v представляют в ассоциированной с $\langle D_i, \leqslant_i\rangle$ дистрибутивной решетке операции взятия точной верхней и точной нижней граней соответственно;

7. $\mathcal{L}$ изоморфна прямому пределу последовательности $\{\langle D_i, \leqslant_i\rangle\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Из определения следует, что в лахлановской полурешетке наибольший элемент не равен наименьшему. Кроме того, лахлановские полурешетки дистрибутивны [5].

Нумерацию α конечного множества $\mathcal{F}$ мы называем *разрешимой*, если для любого $F \in \mathcal{F}$ множество $\alpha^{-1}(F)$ вычислимо. Если α — разрешимая нумерация $\mathcal{F}$, β — произвольная нумерация $\mathcal{G}$ и $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, то $\alpha \leqslant \beta$.

Пусть $\mathbf{a}$ — произвольная T-степень, α, β — нумерации. Мы говорим, что α $\mathbf{a}$-*сводится к* β и пишем $\alpha \leqslant_{\mathbf{a}} \beta$, если существует всюду определенная функция f, вычислимая с оракулом для $\mathbf{a}$, такая что $\alpha = \beta f$. Ясно, что из $\alpha \leqslant \beta$ следует $\alpha \leqslant_{\mathbf{a}} \beta$ для произвольной T-степени $\mathbf{a}$. Мы пишем $\alpha \equiv_{\mathbf{a}} \beta$, если $\alpha \leqslant_{\mathbf{a}} \beta$ и $\beta \leqslant_{\mathbf{a}} \alpha$.

Для произвольных нумераций α и β мы рассматриваем нумерацию $\alpha \oplus \beta$, полагая для $x \in \mathbb{N}$

$$(\alpha \oplus \beta)x = \begin{cases} \alpha y, & x = 2y, \\ \beta y, & x = 2y + 1. \end{cases}$$

Пусть $\mathcal{F}$ — непустое семейство Σ^0_n-подмножеств $\mathbb{N}$ для $n \geqslant 1$, α — нумерация $\mathcal{F}$. Мы называем α Σ^0_n-*вычислимой*, если множество $\{\langle x, y\rangle : x \in \alpha y\}$ принадлежит классу Σ^0_n арифметической иерархии. Для $n = 1$ имеем классическое понятие вычислимой нумерации.

Свойство нумерации быть Σ^0_n-вычислимой наследуется вниз относительно $0^{(n-1)}$-сводимости. Для $\mathcal{F} \subseteq \Sigma^0_n$ множество всех Σ^0_n-вычислимых нумераций $\mathcal{F}$ является предпорядком относительно сводимости. Ассоциированный с ним частичный порядок является верхней полурешеткой, которую мы называем *полурешеткой Роджерса* и обозначаем $\mathcal{R}^0_n(\mathcal{F})$. Для Σ^0_n-вычислимых нумераций α и β элемент полурешетки Роджерса, содержащий $\alpha \oplus \beta$, является точной верхней гранью элементов, содержащих α и β.

Чтобы избежать введения громоздкой системы обозначений, мы отождествляем Σ^0_n-вычислимые нумерации с содержащими их элементами полурешетки Роджерса. Это не приведет нас к недоразумениям.

Для $X \subseteq \mathbb{N}$ через $2X$ мы обозначаем множество $\{2x : x \in X\}$, а через $X + 1$ — множество $\{x + 1 : x \in X\}$.

Пусть A — непустое рекурсивно перечислимое множество и β — нумерация $\mathcal{F}$. Через β_A мы обозначаем нумерацию некоторого подссемейства $\mathcal{F}$, задаваемую правилом: $\beta_A x = \beta f(x)$, где f — произвольная всюду определенная вычислимая функция, такая что $\rho f = A$. С точностью до эквивалентности нумераций β_A не зависит от выбора f. Отметим следующие важные для нас свойства этого обозначения.

1. если $\alpha \leqslant \beta$, то $\alpha \equiv \beta_A$ для некоторого A;

2. $\beta \equiv \beta_{\mathbb{N}}$;

3. $\alpha_A \leqslant \beta_B \Leftrightarrow$ существует частичная вычислимая функция f, такая что $\delta f = A$, $\rho f \subseteq B$ и для любого $x \in A$ $\alpha x = \beta f(x)$;

4. $\beta_A \oplus \beta_B \equiv \beta_{A \cup B}$;

5. $\alpha_A \oplus \beta_B \equiv (\alpha \oplus \beta)_{2A \cup (2B+1)}$;

6. если A и B различаются на конечном числе элементов и β_A, β_B — нумерации одного и того же семейства, то $\beta_A \equiv \beta_B$.

§ 2. Гиперпростые множества и лахлановские полурешетки.

Теорема 1 *Для произвольной лахлановской полурешетки $\mathcal{L}$ существует гиперпростое множество U, такое что $\mathcal{L}$ изоморфна главному идеалу полурешетки m-степеней, порожденному m-степенью U.*

$\blacksquare$ Доказательство этой теоремы основано на идеях Лахлана [6] (конструкция с башнями является незначительной модификацией конструкции из указанной работы). Отдельными моментами доказательства, связанными, главным образом, с терминологией, автор обязан работе Денисова [4].

Пусть $\mathcal{L}$ — лахлановская полурешетка из условия теоремы. Зафиксируем последовательность $\{\langle D_i, \leqslant_i \rangle\}_{i \in \mathbb{N}}$ из определения лахлановской полурешетки. Через $\widetilde{D}_i$ мы обозначаем конечную дистрибутивную решетку, ассоциированную с $\langle D_i, \leqslant_i \rangle$, через $\cup_i$ и $\cap_i$ — операции взятия точной верхней и точной нижней граней в этой решетке. Для $x \in D_i$ через $[x]_i$ обозначим элемент $\widetilde{D}_i$, представителем которого является x.

Для $x, y \in \mathbb{N}$ мы пишем $x \leqslant_\omega y$, если $(\exists i)(x, y \in D_i \;\&\; x \leqslant_i y)$. Отношение $x \leqslant_\omega y$ является предпорядком на $\mathbb{N}$. Ассоциированый с ним порядок изоморфен $\mathcal{L}$.

Пусть L — конечная дистрибутивная решетка. *Атомом* в L назовем произвольный неразложимый элемент в L, отличный от наименьшего, то есть такой $a \in L$, что $(\exists x \in L)(a \nleqslant x)$ и $(\forall x, y \in L)(a = x \cup y \rightarrow a = x \vee a = y)$. Можно показать (см., например, [5]), что каждая конечная дистрибутивная решетка изоморфна подрешетке булевой алгебры подмножеств множества своих атомов: изоморфизм задается правилом, сопоставляющим каждому элементу решетки множество атомов, лежащих под этим элементом.

Применительно к нашему случаю введем еще одно определение атома. *Атомом в* D_i называется произвольное подмножество $A \subseteq D_i$, такое что $A = \{x \in D_i : a \leqslant_i x\}$, где a — элемент D_i и $[a]_i$ — атом в $\widetilde{D}_i$.

Через $u(A, i)$ и $v(A, i)$ обозначим вычислимые функции, первыми аргументами которых являются конечные множества, причем если A — непустое подмножество D_i, то $u(A, i)$ и $v(A, i)$ являются элементами D_i и представляют $\bigcup_i \{[x]_i : x \in A\}$ и $\bigcap_i \{[x]_i : x \in A\}$ соответственно. Существование таких функций следует из п. 6 определения лахлановской полурешетки.

Легко проверить, что $A \subseteq D_i$ — атом в D_i тогда и только тогда, когда $A \neq \emptyset, D_i$ и $v(A, i) \nleqslant_i u(D_i \setminus A, i)$. Заметим, что последнее условие является Σ^0_2-условием на A и i.

Из пп. 2 и 5 определения лахлановской полурешетки следует, что вложения $D_i \subseteq D_{i+1}$ задают отображения $\lambda_i : \widetilde{D}_i \to \widetilde{D}_{i+1}$, сохраняющие точные верхние грани, наибольший и наименьший элементы. Следующая простая лемма дает важное для нас свойство этих отображений.

Лемма 1 *Пусть* L_1, L_2 *— конечные дистрибутивные решетки,* $\lambda : L_1 \to L_2$ *— отображение, сохраняющее точные верхние грани и наименьший элемент,* b *— атом в* L_2*. Тогда минимальные элементы множества* $\{x \in L_1 : \lambda(x) \geqslant b\}$ *являются атомами в* L_1*.*

■ Доказательство можно найти в работе Денисова [4] либо вывести непосредственно из определений. □

Следствие 1 *Пусть* $A \subseteq D_{i+1}$ *— атом в* D_{i+1}*. Тогда существует единственное множество* $C(A)$ *атомов в* D_i*, такое что* $C(A)$ *непусто,* $A \cap D_i = \bigcup C(A)$ *и элементы* $C(A)$ *попарно несравнимы (как множества).*

■ Существование и единственность $C(A)$ следуют из предыдущей леммы, непустота — из того, что λ_i сохраняет наибольший элемент. □

Введем, следуя [6] и [4], каркасы и башни.

Каркасом называется пара $\mathcal{F} = (\mathcal{A}_n, \dots, \mathcal{A}_0; c_n, \dots, c_1)$, состоящая из двух конечных последовательностей, такая что:

F1) для $i \leqslant n$ элементами $\mathcal{A}_i$ являются непустые подмножества D_i, не содержащие 0;

F2) для $i < n$ $c_{i+1} : \mathcal{A}_{i+1} \to \mathcal{P}(\mathcal{A}_i)$ — отображение $\mathcal{A}_{i+1}$ в множество непустых подмножеств $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{A}_i = \bigcup_{A \in \mathcal{A}_{i+1}} c_{i+1}(A)$;

F3) для $i < n$ и $A \in \mathcal{A}_{i+1}$ элементы $c_{i+1}(A)$ попарно несравнимы и $A \cap D_i = \bigcup c_{i+1}(A)$;

F4) множество $\mathcal{A}_n$ одноэлементно.

Число n в этом определении называется *длиной* каркаса $\mathcal{F}$.

Каркас называется *хорошим*, если для любых $i \leqslant n$ и $A \in \mathcal{A}_i$ A — атом в D_i. Из следствия 1 видно, что для произвольного атома A в D_n существует единственный хороший каркас длины n, для которого $\mathcal{A}_n = \{A\}$.

Из приведенного выше замечания следует, что свойство каркаса "быть хорошим"является Σ^0_2-свойством. Принимая во внимание этот факт, зафиксируем вычислимую функцию $\mathrm{mod}_s\mathcal{F}$, такую что:

M1) $\mathrm{mod}_0\mathcal{F} \leqslant \mathrm{mod}_1\mathcal{F} \leqslant \ldots$;

M2) каркас $\mathcal{F}$ хороший $\Leftrightarrow \lim_{s\to\infty} \mathrm{mod}_s\mathcal{F} < \infty$;

M3) если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — различные каркасы, то для любых s и t $\mathrm{mod}_s\mathcal{F} \neq \mathrm{mod}_t\mathcal{G}$;

M4) для всех $n, s \in \mathbb{N}$ множество каркасов $\{\mathcal{F} : \mathrm{mod}_s\mathcal{F} < n\}$ вычислимо равномерно по n и s;

M5) для всех t $\mathrm{mod}_{5t}\mathcal{F} = \mathrm{mod}_{5t+1}\mathcal{F}$.

Свойства **M3** и **M4** легко выполнить, занумеровав эффективным образом все каркасы и определив модуль так, чтобы для каркаса $\mathcal{F}$ с номером n значение $\mathrm{mod}_s\mathcal{F}$ было равно ненулевой степени n-го простого числа. Значение предела $\lim_{s\to\infty} \mathrm{mod}_s\mathcal{F}$ обозначим через $\mathrm{mod}(\mathcal{F})$. Если каркас $\mathcal{F}$ плохой, то $\mathrm{mod}(\mathcal{F}) = \infty$; для хорошего $\mathcal{F}$ значение $\mathrm{mod}(\mathcal{F})$ равно натуральному числу, причем функция mod разнозначна на множестве хороших каркасов.

Башней будем называть пару $\mathcal{T} = (\mathcal{P}_n, \ldots, \mathcal{P}_0; \varphi_n, \ldots, \varphi_0)$, состоящую из двух конечных последовательностей, такую что:

T1) для $i \leqslant n$ элементами $\mathcal{P}_i$ являются непустые конечные подмножества натурального ряда;

T2) для $i \leqslant n$ $\varphi_i : \mathcal{P}_i \to \mathcal{P}(D_i)$ — отображение из $\mathcal{P}_i$ в множество подмножеств D_i;

T3) $\mathcal{P}_n$ одноэлементно;

T4) для $i \leqslant n$ и $P, Q \in \mathcal{P}_i$ если $P \neq Q$, то $P \cap Q = \emptyset$;

T5) для $i < n$ и $P \in \mathcal{P}_{i+1}$ существует (очевидно, единственное) $\varepsilon_{i+1}(P) \subseteq \mathcal{P}_i$, такое что $P = \bigcup \varepsilon_{i+1}(P)$;

T6) для $i < n$ пусть $P \in \mathcal{P}_{i+1}$, $A = \varphi_{i+1}(P)$ и $\varepsilon_{i+1}(P) = \{P_1, \ldots, P_k\}$. Тогда $\{\varphi_i(P_1), \ldots, \varphi_i(P_k)\}$ зависит только от A. Обозначим это семейство подмножеств D_i через $c_{i+1}(A)$;

T7) Пара $(\varphi_n(\mathcal{P}_n), \ldots, \varphi_0(\mathcal{P}_0); c_n, \ldots, c_1)$ является каркасом.

Мы называем каркас, определенный в **T7**, *каркасом башни* $\mathcal{T}$, а про саму башню говорим, что она *построена на этом каркасе*. Число n мы называем *высотой* башни $\mathcal{T}$. Множество, являющееся элементом $\mathcal{P}_n$ мы называем *основанием* башни и обозначаем $\mathrm{base}(\mathcal{T})$.

Ясно, что, имея каркас и достаточно большое конечное множество F, можно построить башню на этом каркасе, взяв множество F в качестве основания.

Для башни $\mathcal{T}$ под $\mathrm{mod}_s\mathcal{T}$ мы понимаем значение функции $\mathrm{mod}_s\mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ — каркас $\mathcal{T}$. Мы называем башню *хорошей*, если ее каркас является хорошим.

Пусть $\mathcal{F} = (\mathcal{A}_n, \ldots, \mathcal{A}_0; c_n, \ldots, c_1)$ — каркас, $k \leqslant n$ и $A \in \mathcal{A}_k$. Существует каркас $(\mathcal{B}_k, \ldots, \mathcal{B}_0; d_k, \ldots, d_1)$ длины k, определяемый следующими соотношениями:

1. $\mathcal{B}_k = \{A\}$;

2. для $i < k$ $\mathcal{B}_i = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_{i+1}} c_{i+1}(B)$;

3. для $i < k$ $d_{i+1} = c_{i+1} \restriction \mathcal{B}_{i+1}$.

Построенный таким образом каркас обозначим через $\mathcal{F}^k_A$.

Пусть $\mathcal{F} = (\mathcal{A}_n, \ldots, \mathcal{A}_0; c_n, \ldots, c_1)$ и $\mathcal{G} = (\mathcal{B}_k, \ldots, \mathcal{B}_0; d_k, \ldots, d_1)$ — два каркаса и $k \leqslant n$. Для $i \leqslant k$ и $B \in \mathcal{B}_i$ обозначим через $\alpha_i(B)$ множество $\{A \in \mathcal{A}_i : B \subseteq A\}$. Мы говорим, что каркас $\mathcal{G}$ *вкладывается* в каркас $\mathcal{F}$ и пишем $\mathcal{G} \preccurlyeq \mathcal{F}$, если для $B \in \mathcal{B}_k$ $\alpha_k(B) \neq \emptyset$ и для всех $i < k$, $B \in \mathcal{B}_{i+1}$, $B' \in d_{i+1}(B)$ и $A \in \alpha_{i+1}(B)$ имеем $c_{i+1}(A) \cap \alpha_i(B') \neq \emptyset$.

Лемма 2 *Пусть $\mathcal{F} = (\mathcal{A}_n, \ldots, \mathcal{A}_0; c_n, \ldots, c_1)$ и $\mathcal{G} = (\mathcal{B}_k, \ldots, \mathcal{B}_0; d_k, \ldots, d_1)$ — два хороших каркаса, $k \leqslant n$ и для (единственного) $B \in \mathcal{B}_k$ существует $A \in \mathcal{A}_k$, такое что $B \subseteq A$. Тогда $\mathcal{G} \preccurlyeq \mathcal{F}$*

■ Пусть для $i < k$ и $A \subseteq D_{i+1}$ — атома в D_{i+1} $C(A)$ — семейство атомов в D_i, введенное в следствии 1.

Сначала покажем, что если $B \subseteq A \subseteq D_{i+1}$ — атомы в D_{i+1}, то для любого $B' \in C(B)$ найдется $A' \in C(A)$, такой что $B' \subseteq A'$. Действительно, пусть $A = \{x \in D_{i+1} : a \leqslant_{i+1} x\}$ и $B = \{x \in D_{i+1} : b \leqslant_{i+1} x\}$, где $[a]_{i+1}$ и $[b]_{i+1}$ — атомы в $\widetilde{D}_{i+1}$. Из построения $C(B)$ заключаем, что $B' = \{x \in D_i : b' \leqslant_i x\}$, где $[b']_i$ — минимальный элемент множества

$\{[x]_i : \lambda_i([x]_i) \geqslant [b]_{i+1}\}$. Так как $a \leqslant_{i+1} b$, то найдется $a' \in D_i$, такой что $[a']_i$ — минимальный элемент множества $\{[x]_i : \lambda_i([x]_i) \geqslant [a]_{i+1}\}$, лежащий под $[b']_i$. Но тогда $A' = \{x \in D_i : a' \leqslant_i x\}$ — атом в D_i, $B' \subseteq A'$ и $A' \in C(A)$.

Теперь проверим условие вложимости $\mathcal{G}$ в $\mathcal{F}$. $\alpha_k(B) \neq \emptyset$ по условию леммы. Пусть для $i < k$ $B \in \mathcal{B}_{i+1}$, $B' \in d_{i+1}(B)$, $A \in \mathcal{A}_{i+1}$ и $B \subseteq A$. Так как каркасы $\mathcal{G}$ и $\mathcal{F}$ хорошие, то $d_{i+1}(B) = C(B)$ и $c_{i+1}(A) = C(A)$. Из доказанного выше следует, что для некоторого $A' \in C(A)$ $A' \in \alpha_i(B')$. $\square$

Мы говорим, что каркасы $\mathcal{F} = (\mathcal{A}_n, \ldots, \mathcal{A}_0; c_n, \ldots, c_1)$ и $\mathcal{G} = (\mathcal{B}_k, \ldots, \mathcal{B}_0; d_k, \ldots, d_1)$ *совместны на уровне* i для $i \leqslant \min\{n, k\}$, если для некоторых $B \in \mathcal{B}_i$ и $A \in \mathcal{A}_i$ имеем $\mathcal{G}^i_B \preccurlyeq \mathcal{F}^i_A$. Мы говорим, что башни *совместны*, если их каркасы совместны (на некотором уровне i).

Пусть $\mathcal{T} = (\mathcal{P}_n, \ldots, \mathcal{P}_0; \varphi_n, \ldots, \varphi_0)$ и $\mathcal{S} = (\mathcal{Q}_k, \ldots, \mathcal{Q}_0; \psi_k, \ldots, \psi_0)$ — две различные башни с непересекающимися основаниями, совместные на уровне i, $\mathcal{F} = (\mathcal{A}_n, \ldots, \mathcal{A}_0; c_n, \ldots, c_1)$ и $\mathcal{G} = (\mathcal{B}_k, \ldots, \mathcal{B}_0; d_k, \ldots, d_1)$ — их каркасы. Для некоторых $B \in \mathcal{B}_i$, $A \in \mathcal{A}_i$, $P \in \mathcal{P}_i$ и $Q \in \mathcal{Q}_i$ имеем $\mathcal{G}^i_B \preccurlyeq \mathcal{F}^i_A$, $B = \psi_i(Q)$ и $A = \varphi_i(P)$. Опишем операцию преобразования башен.

Для $i \leqslant j \leqslant n$ и $X \in \mathcal{P}_j$ полагаем $X^* = X$, если $X \cap P = \emptyset$, и $X^* = X \cup Q$, если $P \subseteq X$.

Пусть $j < i$ и для всех $X \in \mathcal{P}_{j+1}$ значение X^* уже определено. Пусть $X \in \mathcal{P}_{j+1}$ и $X = Z_0 \cup \ldots \cup Z_m$ для $Z_0, \ldots, Z_m \in \mathcal{P}_j$. Если $X \cap P = \emptyset$, то полагаем $Z^*_r = Z_r$ для всех $r \leqslant m$. Пусть $X \subseteq P$. Описываемое построение таково, что $X^* \setminus X = Y_1 \cup \ldots \cup Y_p$, где $Y_s \subseteq Q$, $Y_s \in \mathcal{Q}_{j+1}$ и $\psi_{j+1}(Y_s) \subseteq \varphi_{j+1}(X)$ для всех $s \leqslant p$. Пусть для $s \leqslant p$ $Y_s = Y^0_s \cup \ldots \cup Y^q_s$, где $Y^0_s, \ldots, Y^q_s \in \mathcal{Q}_j$. Из $\mathcal{G}^i_B \preccurlyeq \mathcal{F}^i_A$ следует, что для каждого $t \leqslant q$ найдется $r \leqslant m$, такое что $\psi_j(Y^t_s) \subseteq \varphi_j(Z_r)$. Выберем для всех $s \leqslant p$ и $t \leqslant q(s)$ такое r и положим для всех $r \leqslant m$ $Z^*_r = Z_r \cup \bigcup\{Y^t_s : 1 \leqslant s \leqslant p, t \leqslant q(s), r = r(s,t)\}$.

Для каждого $j \leqslant n$ положим $\mathcal{P}^*_j = \{X^* : X \in \mathcal{P}_j\}$. Для $j \leqslant n$ и $X \in \mathcal{P}_j$ пусть $\varphi^*_j(X^*) = \varphi_j(X)$.

Легко показать, что построенная пара $(\mathcal{P}^*_n, \ldots, \mathcal{P}^*_0; \varphi^*_n, \ldots, \varphi^*_0)$ является башней с основанием $\mathrm{base}(\mathcal{T}) \cup Q$, которую мы обозначим через $\mathcal{T}^*$. Отметим следующие свойства описанного построения:

P1) каркасы башен $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}^*$ совпадают и, следовательно, $\mathrm{mod}_s\mathcal{T} = \mathrm{mod}_s\mathcal{T}^*$ для любого s;

P2) для $j \leqslant i$ и $Y \in \mathcal{Q}_j$ либо $Y \subseteq \mathrm{base}(\mathcal{T}^*)$, либо $Y \cap \mathrm{base}(\mathcal{T}^*) = \emptyset$;

P3) для $j \leqslant i$ если $Y \in \mathcal{Q}_j$ и $Y \subseteq \mathrm{base}(\mathcal{T}^*)$, то для некоторого единственного $X^* \in \mathcal{P}^*_j$ $Y \subseteq X^*$ и $\psi_j(Y) \subseteq \varphi^*_j(X^*)$;

P4) для каждого $j \leqslant n$ и $X \in \mathcal{P}_j$ существует единственное $X^* \in \mathcal{P}_j^*$, такое что $X \subseteq X^*$, причем $\varphi_j(X) = \varphi_j^*(X^*)$.

Мы будем говорить, что башня $\mathcal{T}^*$ *получена преобразованием башни* $\mathcal{T}$ *уровня* i *посредством* P *и* Q.

Прежде чем приступить к описанию конструкции, сделаем несколько замечаний.

Все шаги конструкции эффективны. Если на каком-либо шаге необходимо произвести выбор из нескольких альтернатив, то этот выбор производится некоторым эффективным образом.

На каждом шаге конструкции мы можем совершить одно из следующих действий: построить башню, разрушить башни, подвергнуть преобразованию одну башню и разрушить другую, перечислить элементы в множество U. Множество чисел, перечисленных в U к шагу s, мы обозначаем через U^s. Мы называем число *неиспользованным* до шага s, если оно не лежит в основании башни, построенной на меньшем шаге; в противном случае мы говорим, что оно *использовано.* Через D^s мы обозначаем множество чисел, лежащих в основаниях башен, которые были построены и затем разрушены до шага s. Конструкция устроена так, что числа, которые уже были использованы, не могут использоваться повторно: таким образом, $D^0 \subseteq D^1 \subseteq \ldots$ и множество $D = \bigcup_{s\in\mathbb{N}} D^s$ рекурсивно перечислимо. Разрушая башню, мы автоматически перечисляем ее основание в U, то есть $D^s \subseteq U^s$ для любого s. Другая особенность перечисления U заключается в том, что на каждом шаге основание любой существующей башни либо целиком лежит в U, либо не пересекается с U.

В конструкции участвуют требования двух видов. P-требования или требования вида P_e — это требования "$(\exists x \in W_e)(H_x \subseteq U)$". Смысл P-требований понятен: мы стремимся сделать дополнение к U гипериммунным. Требование P_e *удовлетворено на шаге* s, если существует $x \in W_e^s$, такой что $H_x \subseteq U^s$.

Другой вид требований — это R-требования, которые имеют вид $R_{n,m,e}$ для $n, m, e \in \mathbb{N}$. Смысл этих требований станет ясен позднее, а пока мы дадим формальные правила работы с ними.

R-требования мы, по ходу конструкции, будем связывать с башнями. С каждой существующей башней будет связано единственное R-требование хотя само R-требование может быть связано более чем с одной башней (либо не связано не с одной). Для каждой башни требование, связанное с ней, не может менятся; оно может перестать быть связанным с башней лишь в том случае, если башня будет разрушена.

Пусть $\mathcal{T}$ — башня, $(\mathcal{A}_k, \ldots, \mathcal{A}_0; c_k, \ldots, c_0)$ — ее каркас и $A \in \mathcal{A}_k$. Мы говорим, что требование $R_{n,m,e}$ *свободно для башни* $\mathcal{T}$ *на шаге* s, если

$n \in A$, $m \notin A$ и $R_{n,m,e}$ не связано на шаге s ни с какой башней $\mathcal{S}$, для которой $\mathrm{mod}_s\mathcal{S} < \mathrm{mod}_s\mathcal{T}$.

Зафиксируем некоторую эффективную процедуру $c(\mathcal{T}, n)$, такую что если $\mathcal{T} = (\mathcal{P}_k, \ldots, \mathcal{P}_0; \varphi_k, \ldots, \varphi_0)$ — башня, $A \in \varphi_k(\mathcal{P}_k)$, $n \in A$ и $p \leqslant k$ — наименьшее число, для которого $n \in D_p$, то $c(\mathcal{T}, n)$ — элемент $\mathcal{P}_p$, для которого $n \in \varphi_p(c(\mathcal{T}, n))$. Существование такого элемента в $\mathcal{P}_p$ следует из **F3** и **T7**.

Пусть $\mathcal{T}$ — башня, существующая на шаге s, с которой на этом шаге связано требование $R_{n,m,e}$ и $X = c(\mathcal{T}, n)$. Мы говорим, что требование $R_{n,m,e}$ *удовлетворено на шаге* s, если существует $x \in X$, такой что $f_e^s x$ не определено, либо неиспользовано, либо $(x \in U^s \leftrightarrow f_e x \notin U^s)$, либо $x \notin U^s$ и $f_e x$ принадлежит $\mathrm{base}(\mathcal{T})$,

Мы считаем, что все R-требования упорядочены эффективным образом по типу натуральных чисел.

Дадим описание конструкции.

Шаг $s = 5t$. Ищем каркас с наименьшим модулем, который не является каркасом какой-либо существующей башни (мы можем сделать это эффективно в силу **M3** и **M4**). Строим башню на этом каркасе, беря достаточно большой начальный отрезок неиспользованных натуральных чисел в качестве основания. Ищем наименьшее R-требование, которое свободно для этой башни на шаге s, и связываем его с ней.

Шаг $s = 5t + 1$. Ищем башню $\mathcal{T}$ с наименьшим модулем, существующую к шагу s, для которой $\mathrm{mod}_s\mathcal{T} < \mathrm{mod}_{s+5}\mathcal{T}$. Если такая $\mathcal{T}$ найдется, разрушаем $\mathcal{T}$ и все башни с модулем, большим $\mathrm{mod}_s\mathcal{T}$.

Шаг $s = 5t + 2$. Проверим, существуют ли башни $\mathcal{T} = (\mathcal{P}_n, \ldots, \mathcal{P}_0; \varphi_n, \ldots, \varphi_0)$ и $\mathcal{S} = (\mathcal{Q}_k, \ldots, \mathcal{Q}_0; \psi_k, \ldots, \psi_0)$, удовлетворяющие следующим четырем условиям:

1. башни $\mathcal{T}$ и $\mathcal{S}$ совместны, то есть существуют $i \leqslant n, k$, $P \in \mathcal{P}_i$ и $Q \in \mathcal{Q}_i$, такие что башня $\mathcal{T}$ может быть преобразована на уровне i посредством P и Q;
2. $\mathrm{mod}_s\mathcal{T} < \mathrm{mod}_s\mathcal{S}$;
3. $[\mathrm{base}(\mathcal{T}) \cup \mathrm{base}(\mathcal{S})] \cap U^s = \emptyset$;
4. $P \cap W_i^s = \emptyset$, $Q \cap W_i^s \neq \emptyset$.

Если такие башни существуют, то выбираем $\mathcal{T}$ с наименьшим модулем, а для нее — наименьшее i. Подвергаем $\mathcal{T}$ преобразованию уровня i посредством P и Q (при этом связанное с $\mathcal{T}$ R-требование остается связанным с $\mathcal{T}^*$), разрушаем $\mathcal{S}$ и все башни с большим модулем.

Шаг $s = 5t + 3$. Проверяем, существуют ли башни, для которых связанные с ними R-требования не удовлетворены. Если есть, то выбираем среди них башню $\mathcal{T}$ с минимальным модулем. Пусть с $\mathcal{T}$ связано требование $R_{n,m,e}$ и $X = c(\mathcal{T}, n)$. Выберем $x \in X$. Так как требование $R_{n,m,e}$ не удовлетворено, то $f_e x$ определено, использовано, и $(x \in U^s \leftrightarrow f_e x \in U^s)$. Если $x \in U^s$, то разрушаем башню $\mathcal{T}$ и все башни с большим модулем. Если $x \notin U^s$, то $f_e x \notin \mathrm{base}(\mathcal{T})$, $f_e x \notin U^s$ и, значит, $f_e x$ лежит в основании некоторой существующей башни $\mathcal{S}$, отличной от $\mathcal{T}$, для которой $\mathrm{base}(\mathcal{S}) \cap U^s = \emptyset$. Выбираем из двух башен $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$ башню с большим модулем и перечисляем ее основание в U.

Шаг $s = 5t + 4$. Просматривая все $e \leqslant s$, ищем среди них наименьшее, для которого P_e не удовлетворено и для некоторого $x \in W_e^s$ все элементы H_x либо принадлежат U^s, либо лежат в основаниях существующих башен с модулями, большими e. Если такое e существует, то выберем для него соответствующий $x \in W_e^s$ и перечислим в U все основания башен, которые еще не перечислены в U и содержат элементы из H_x.

Описание конструкции закончено. Докажем ряд предложений, относящихся к ее свойствам, из которых будет следовать утверждение теоремы.

Лемма 3 *Каждая башня может быть преобразована лишь конечное число раз.*

■ Для башни $\mathcal{T} = (\mathcal{P}_n, \ldots, \mathcal{P}_0; \varphi_n, \ldots, \varphi_0)$ рассмотрим функцию $\alpha_s(\mathcal{T}) = \sum_{x \leqslant n} \gamma_x^s(\mathcal{T})$, где $\gamma_x^s(\mathcal{T})$ равно числу элементов множества $\mathcal{P}_x$, имеющих непустое пересечение с W_x^s. Эта функция не убывает с ростом s и уменьшается после каждого преобразования башни $\mathcal{T}$. □

Из конструкции следует, что все время, пока башня существует, ее модуль остается неизменным. Поэтому мы говорим просто о модуле башни, опуская аргумент s. Мы называем башню *финальной на шаге* s (или просто *финальной*), если она существует на шаге s и на всех последующих шагах не разрушается и не подвергается преобразованиям. Из предыдущей леммы следует, что каждая построенная башня либо через некоторое время разрушиться, либо станет финальной.

Отметим следующий факт: если на шаге s существуют две башни $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$ и $\mathrm{mod}_s\mathcal{T} < \mathrm{mod}_s\mathcal{S}$, то башня $\mathcal{T}$ была построена раньше, чем $\mathcal{S}$. Действительно, в момент постройки $\mathcal{S}$ должна существовать башня с каркасом, равным каркасу $\mathcal{T}$, поскольку на шагах $5t$ мы строим башню на свободном каркасе с наименьшим модулем. На последующих шагах, меньших s, эта башня не может быть разрушена, так как тогда разрушилась бы и $\mathcal{S}$ как башня с большим модулем. Значит, эта башня и есть $\mathcal{T}$ (либо

$\mathcal{T}$ возникла из этой башни после ряда преобразований). Для финальных башен этот факт означает, что порядок их постройки совпадает с порядком по модулю.

Ясно, что любая башня, построенная на плохом каркасе, рано или поздно будет разрушена. Для хороших каркасов, как показывает следующая лемма, ситуация иная.

Лемма 4 *Для каждого хорошего каркаса $\mathcal{F}$ существует финальная башня с модулем, равным* $\mathrm{mod}(\mathcal{F})$*, построенная на этом каркасе, причем связанное с ней R-требование удовлетворяется на всех достаточно больших шагах.*

■ Доказажем это утверждение индукцией по значению $\mathrm{mod}(\mathcal{F})$.

Пусть для всех каркасов $\mathcal{G}$, таких что $\mathrm{mod}(\mathcal{G}) < \mathrm{mod}(\mathcal{F})$, это верно. Выберем s настолько большим, что для него выполнены следующие свойства:

s1) для всех $\mathcal{G}$, таких что $\mathrm{mod}(\mathcal{G}) < \mathrm{mod}(\mathcal{F})$, финальная башня, о которой говорится в лемме, существует на шаге s;

s2) $\mathrm{mod}_s\mathcal{F} = \mathrm{mod}(\mathcal{F})$;

s3) для всех $\mathcal{G}$, таких что $\mathrm{mod}(\mathcal{G}) > \mathrm{mod}(\mathcal{F})$, $\mathrm{mod}_s\mathcal{G} > \mathrm{mod}(\mathcal{F})$;

s4) все требования P_e для $e < \mathrm{mod}(\mathcal{F})$, которые когда-либо удовлетворяются, уже удовлетворены;

s5) если основание финальной башни с модулем, меньшим $\mathrm{mod}(\mathcal{F})$, является подмножеством U, то оно является подмножеством U^s.

Сначала покажем, что существует финальная башня с каркасом $\mathcal{F}$.

Если после выполнения шага s существует башня с каркасом $\mathcal{F}$, которая впоследствии не разрушается, то после конечного числа преобразований она станет финальной. Если же это не так, то либо после шага s нет башни с каркасом $\mathcal{F}$, либо она есть, но впоследствии будет разрушена. В любом случае найдется шаг $5r > s$, перед выполнением которого не будет существовать башни с каркасом $\mathcal{F}$; из **s1** — **s3** следует, что на этом шаге будет построена башня именно с этим каркасом, причем впоследствии она не может быть разрушена на шагах вида $5t + 1$ и $5t + 2$.

Если эта башня не разрушается, то после конечного числа преобразований она станет финальной. Если же разрушается, то это возможно только на шаге $5t + 3 > 5r$, однако перед этим ее основание должно быть перечислено в U. Этого не может произойти на шаге вида $5t + 4$ из-за **s4** и, значит, это происходит на шаге вида $5t + 3$. Из описания шагов такого вида следует, что в этом случае для некоторого $x \in X$ $f_e x \notin U^s$, причем $f_e x$ лежит в основании башни с меньшим модулем. Однако из **s1** — **s3**, **s5** следует, что после этого R-требование, связанное с нашей башней, будет всегда удовлетворено, и башня не сможет разрушиться.

Осталось показать, что R-требование, связанное с финальной башней, построенной на каркасе $\mathcal{F}$, удовлетворяется при всех достаточно больших s. Пусть F — основание этой башни. Пусть s — настолько большой шаг, что выполнено **s1** – **s5**, башня, о которой идет речь, существует и является финальной, $\delta f_e^s \cap F = \delta f_e \cap F$, все числа из $f_e(F)$ использованы и $[F \cup f_e(F)] \cap U = [F \cup f_e(F)] \cap U^s$. Тогда если наше требование не удовлетворено на шаге s, то оно не удовлетворено и на всех больших шагах. Однако этого не может быть, так как в этом случае на шаге $5t+3 > s$ мы либо разрушим башню, либо удовлетворим требование. □

Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество финальных башен, основания которых не лежат в U. Множество $A \subseteq D_i$ назовем *i-плотным*, если существует бесконечно много башен $(\mathcal{P}_n, \ldots, \mathcal{P}_0; \varphi_n, \ldots, \varphi_0)$ из $\mathfrak{S}$, таких что $i \leqslant n$ и $A \in \varphi_i(\mathcal{P}_i)$. Назовем A *i-насыщенным*, если существует бесконечно много башен $(\mathcal{P}_n, \ldots, \mathcal{P}_0; \varphi_n, \ldots, \varphi_0)$ из $\mathfrak{S}$, таких что $i \leqslant n$ и для некоторого $P \in \mathcal{P}_i$ $\varphi_i(P) = A$ и $P \cap W_i \neq \emptyset$.

Лемма 5 *Если множество A i-насыщенно, то оно i-плотное и для любых $(\mathcal{P}_n, \ldots, \mathcal{P}_0; \varphi_n, \ldots, \varphi_0) \in \mathfrak{S}$, $P \in \mathcal{P}_i$ если $\varphi_i(P) = A$, то $P \cap W_i \neq \emptyset$. Если A i-насыщенно, B i-плотно и $A \subseteq B$, то B i-насыщенно.*

■ Плотность насыщенного множества следует из определений. Для всего остального достаточно доказать, что если A i-насыщенно, B i-плотное, $A \subseteq B$ и для $\mathcal{T} = (\mathcal{P}_n, \ldots, \mathcal{P}_0; \varphi_n, \ldots, \varphi_0) \in \mathfrak{S}$ $P \in \mathcal{P}_i$ и $\varphi_i(P) = B$, то $P \cap W_i \neq \emptyset$.

Пусть это не так. Зафиксируем башню $\mathcal{T} = (\mathcal{P}_n, \ldots, \mathcal{P}_0; \varphi_n, \ldots, \varphi_0)$ из $\mathfrak{S}$ и $P \in \mathcal{P}_i$, такие что $\varphi_i(P) = B$ и $P \cap W_i = \emptyset$. Так как A i-насыщенно, то существуют $\mathcal{S} = (\mathcal{Q}_k, \ldots, \mathcal{Q}_0; \psi_k, \ldots, \psi_0) \in \mathfrak{S}$ и $Q \in \mathcal{Q}_i$, такие что $\psi_i(Q) = A$, $Q \cap W_i \neq \emptyset$ и $\mathrm{mod}(\mathcal{T}) < \mathrm{mod}(\mathcal{S})$. Пусть $s = 5t+2$ — настолько большой шаг, что $\mathcal{S}$ существует, все башни с модулями, не превосходящими $\mathrm{mod}(\mathcal{S})$, которые существуют на этом шаге, являются финальными и $Q \cap W_i^s \neq \emptyset$. Так как $\mathcal{T}$ и $\mathcal{S}$ — финальные башни, то их каркасы хорошие и, по лемме 2, $\mathcal{T}$ может быть подвергнута на шаге s преобразованию уровня i посредством P и Q. Однако это противоречит выбору s. □

Для каждого $A \subseteq D_i$, которое не является i-плотным, существует лишь конечное число башен $(\mathcal{P}_n, \ldots, \mathcal{P}_0; \varphi_n, \ldots, \varphi_0) \in \mathfrak{S}$, таких что для некоторого $P \in \mathcal{P}_i$ $\varphi_i(P) = A$. Обозначим множество всех таких башен для всех не i-плотных $A \subseteq D_i$ через $\mathfrak{N}_i$. Так как D_i конечно, то $\mathfrak{N}_i$ тоже конечно.

Каркас $\mathcal{F} = (\mathcal{A}_n, \ldots, \mathcal{A}_0; c_n, \ldots, c_1)$ назовем *i-хорошим*, если для любого $j \leqslant \min\{i, k\}$ и для любого $A \in \mathcal{A}_j$ $\mathcal{F}^j_A$ — хороший каркас. Ясно, что каркас хороший тогда и только тогда, когда он i-хороший для любого i. При каждом фиксированном i свойство каркаса "быть i-хорошим"проверяется эффективно. Мы называем башню *i-хорошей*, если ее каркас является i-хорошим.

Лемма 6 *Для каждого $i \in \mathbb{N}$ существует лишь конечное число шагов, на которых i-хорошие башни $(\mathcal{P}_n, \ldots, \mathcal{P}_0; \varphi_n, \ldots, \varphi_0)$ с $P \in \mathcal{P}_i$, таким что $\varphi_i(P)$ — i-плотное, но не i-насыщенное, подвергаются преобразованиям уровня i посредством P и Q при некотором Q.*

$\blacksquare$ Пусть $A \subseteq D_i$ — i-плотное, но не i-насыщенное. Пусть $\mathcal{T} = (\mathcal{P}_n, \ldots, \mathcal{P}_0; \varphi_n, \ldots, \varphi_0) \in \mathfrak{S}$ — финальная башня, такая что для некоторого $P \in \mathcal{P}_i$ $\varphi_i(P) = A$ и $P \cap W_i = \emptyset$. Пусть s_A — такой шаг, что башня $\mathcal{T}$ существует и все башни, модуль которых на шаге s_A не превосходит модуль $\mathcal{T}$, являются финальными. После шага s_A никакая i-хорошая башня $\mathcal{T}' = (\mathcal{P}'_n, \ldots, \mathcal{P}'_0; \varphi'_n, \ldots, \varphi'_0)$ не может быть преобразована на уровне i посредством P' и Q' при любом Q', если P' таково, что $\varphi'_i(P') = A$, так как если ее модуль не больше $\mathrm{mod}(\mathcal{T})$, то она финальная, а если больше, то вместо нее преобразованию должна подвергнуться башня $\mathcal{T}$. После шага $s^i = \max\{s_A : A$ — i-плотное, но не i-насыщенное$\}$ ни одно из преобразований, о которых говорится в лемме, невозможно. $\square$

Для каждого $i \in \mathbb{N}$ и $x \in D_i$ определим семейство рекурсивно перечислимых множеств $\{V^{i,x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Для $n, y \in \mathbb{N}$ полагаем $y \in V^{i,x}_n$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих двух условий:

1. $n \in U$ и $y \in U$;

2. существует финальная башня $(\mathcal{P}_k, \ldots, \mathcal{P}_0; \varphi_k, \ldots, \varphi_0) \in \mathfrak{S}$, такая что $k \geqslant i$ и для некоторого $P \in \mathcal{P}_i$ $x \in \varphi_i(P)$ и $n, y \in P$.

Каждое множество из этого семейства действительно рекурсивно перечислимо, поскольку оно либо равно U, либо конечно. Нетрудно также заметить, что если $V^{i,x}_n \neq \emptyset$, то $n \in V^{i,x}_n$. Следующая лемма показывает, что множества из этого семейства перечислимы равномерно по n.

Лемма 7 *Множество $\{\langle y, n\rangle : y \in V^{i,x}_n\}$ является рекурсивно перечислимым.*

$\blacksquare$ Определим для каждых $n, s \in \mathbb{N}$ конечное множество $V^{i,x}_{n,s}$ так, чтобы $V^{i,x}_{n,0} \subseteq V^{i,x}_{n,1} \subseteq \dots$ и $V^{i,x}_{n} = \bigcup_{s \in \mathbb{N}} V^{i,x}_{n,s}$.

Пусть для $j < i$ s^j — шаг, определенный в доказательстве леммы 6, а $s_0 = \max\{s^j : j < i\}$. Для каждого $s \in \mathbb{N}$ полагаем $V^{i,x}_{n,s} =$

1. U^s, если $n \in U^s$;

2. P, если $n \notin U^s$, $s > s_0$ и на шаге s существует башня $\mathcal{T} = (\mathcal{P}_k, \dots, \mathcal{P}_0; \varphi_k, \dots, \varphi_0)$ с $k \geqslant i$ и $P \in \mathcal{P}_i$, такая что $x \in \varphi_i(P)$, $n \in P$ и для любых $j < i$ и башни $\mathcal{S} = (\mathcal{Q}_m, \dots, \mathcal{Q}_0; \psi_m, \dots, \psi_0)$, существующей на шаге s, для которой $\mathrm{mod}_s \mathcal{S} < \mathrm{mos}_s \mathcal{T}$, башня $\mathcal{S}$ i-хорошая и либо $\mathrm{base}(\mathcal{S}) \subseteq U^s$, либо $\mathcal{S} \in \mathfrak{N}_j$, либо для любого $Q \in \mathcal{Q}_j$ множество $\psi_j(Q)$ j-плотное и если $\psi_j(Q)$ j-насыщенное, то $Q \cap W^s_j \neq \emptyset$.

3. $\emptyset$, если не выполнены случаи 1 и 2.

Ясно, что $V^{i,x}_{n,s}$ вычисляется эффективно по n и s.

Покажем, что для призвольного s имеет место включение $V^{i,x}_{n,s} \subseteq V^{i,x}_{n,s+1}$. Если $V^{i,x}_{n,s}$ вычисляются по пунктам 1 или 3 этого определения, то включение очевидно. Пусть $V^{i,x}_{n,s}$ вычисляются по пункту 2 и $\mathcal{T}$, P — такие, как в пункте 2. Если на шаге s с башней $\mathcal{T}$ ничего не происходит, то $V^{i,x}_{n,s} = V^{i,x}_{n,s+1}$. Если $s \neq 5t + 2$ и на шаге s эта башня разрушается либо ее основание перечисляется в U, то $V^{i,x}_{n,s} \subseteq U^{s+1} = V^{i,x}_{n,s+1}$. Наконец, пусть $s = 5t + 2$ и с башней $\mathcal{T}$ на шаге s что-то происходит. Если $\mathcal{T}$ разрушается на шаге s из-за того, что преобразовывается какая-то башня за счет башни с меньшим модулем, то, как и в предыдущем случае, $V^{i,x}_{n,s} \subseteq U^{s+1} = V^{i,x}_{n,s+1}$. Если мы преобразовываем саму башню $\mathcal{T}$, то, как следует из **P4**, $V^{i,x}_{n,s} = P \subseteq P^* = V^{i,x}_{n,s+1}$. Остается случай, когда мы преобразовываем башню с меньшим модулем за счет самой башни $\mathcal{T}$. Из условий пункта 2, леммы 6, определения $\mathfrak{N}_i$ и описания шага $5t+2$ видно, что это должно быть преобразование уровня, не меньшего i. Однако тогда из **P2** и **P3** видно, что либо опять $V^{i,x}_{n,s} \subseteq U^{s+1} = V^{i,x}_{n,s+1}$, либо $V^{i,x}_{n,s+1}$ вычисляется по пункту 2 и $V^{i,x}_{n,s} \subset V^{i,x}_{n,s+1}$.

Ясно, что если $n \in U$, то для всех достаточно больших s $V^{i,x}_{n,s} = U^s$. Остается лишь доказать, что если $n \notin U$, то почти для всех s $V^{i,x}_{n,s} = V^{i,x}_{n}$. Пусть $\mathcal{T} = (\mathcal{P}_k, \dots, \mathcal{P}_0; \varphi_k, \dots, \varphi_0)$ — финальная башня из $\mathfrak{S}$ и $n \in \mathrm{base}(\mathcal{T})$. Пусть s' — настолько большой шаг, что $\mathcal{T}$ существует, и все башни, которые существуют на шаге s и модуль которых не превосходит $\mathrm{mod}(\mathcal{T})$, являются финальными. Обозначим множество этих башен через $\mathfrak{F}$. Если $k < i$, то $V^{i,x}_{n} = \emptyset$ и для всех $s > s'$ $V^{i,x}_{n,s} = \emptyset$. Если $k \geqslant i$, то пусть $P \in \mathcal{P}_i$ таково, что $n \in P$. Если $x \notin \varphi_i(P)$, то опять $V^{i,x}_{n} = \emptyset$ и для всех $s > s'$ $V^{i,x}_{n,s} = \emptyset$. Наконец, пусть $x \in \varphi_i(P)$. Тогда $V^{i,x}_n = P$. Пусть $F = \bigcup\{\mathrm{base}(\mathcal{S}) : \mathcal{S} \in \mathfrak{F}\}$ и $s'' > s'$ таково, что $F \cap U^{s''} = F \cap U$ и для любого $j < i$ $F \cap W^{s''}_j = F \cap W_j$. Пусть $s > \max\{s'', s_0\}$, $j < i$ и $\mathcal{S} = (\mathcal{Q}_m, \ldots, \mathcal{Q}_0; \psi_m, \ldots, \psi_0) \in \mathfrak{F}$. Так как $\mathcal{S}$ финальная, то она i-хорошая. Если $\mathrm{base}(\mathcal{S}) \not\subseteq U^s$ и $\mathcal{S} \notin \mathfrak{N}_j$, то $\mathcal{S} \in \mathfrak{S}$ и для любого $Q \in \mathcal{Q}_j$ множество $\psi_j(Q)$ j-плотное. Из выбора s'' и леммы 5 следует, что если $\psi_j(Q)$ j-насыщенно, то $Q \cap W^s_j \neq \emptyset$. Значит, $V^{i,x}_{n,s} = P$. $\square$

Пусть для $x \in D_i$ $R_{i,x} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V^{i,x}_n$. Из замечания, сделанного перед леммой 7, следует, что $R_{i,x} = \{n : n \in V^{i,x}_n\}$. По лемме 7 $R_{i,x}$ рекурсивно перечислимо. Мы можем предполагать, что $R_{i,x}$ непусто для всех i и $x \in D_i$, поскольку $U \neq \emptyset$; иначе можно перед началом конструкции перечислить 0 в U и объявить его использованным. Следующая лемма дает нам два основных свойства этих множеств (и во многом проясняет смысл конструкции).

Лемма 8 *Для $x \in D_i$ $\psi_U(R_{i,x}) = \psi_U(R_{i+1,x})$. Если $W_i \neq \emptyset$, то существует $e \in D_i$, такое что $\psi_U(W_i) = \psi_U(R_{i,e})$.*

$\blacksquare$ Неравенство $\psi_U(R_{i,x}) \leqslant_m \psi_U(R_{i+1,x})$ следует из того, что множество $R_{i,x} \setminus R_{i+1,x}$ конечно. Дествительно, из **F2**, **F3** и **T5** – **T7** следует, что для любого n $V^{i,x}_n \subseteq V^{i+1,x}_n$ за исключением случаев, когда $V^{i,x}_n$ является основанием финальной башни высоты i. Чтобы доказать обратное неравенство, нужно определить частичную вычислимую функцию f, такую что $\delta f = R_{i+1,x}$, $\rho f \subseteq R_{i,x}$ и $n \in U \leftrightarrow fn \in U$. Пусть fn равно некоторому y, такому что $y \in V^{i+1,x}_n \cap V^{i,x}_y$. Из леммы 7 следует, что если такой y существует, то его можно найти эффективно по n. Из **F3** и **T5** – **T7** следует, что если $n \in V^{i+1,x}_n$, то такой y найдется. Наконец, так как для каждого n либо $V^{i+1,x}_n \subseteq U$, либо $V^{i+1,x}_n \cap U = \emptyset$, то для $n \in \delta f$ $n \in U \leftrightarrow fn \in U$.

Докажем вторую часть леммы. Если $W_i \setminus U$ конечно, то $\psi_U(W_i) = \psi_U(U) = \psi_U(R_{i,0})$, так как не один атом в D_i не содержит 0. Пусть $W_i \setminus U$ бесконечно. Тогда множество i-насыщенных подмножеств D_i непусто. Каждое i-насыщенное подмножество является атомом в D_i; пусть $[a_0]_i, \ldots, [a_m]_i$ — атомы в $\widetilde{D}_i$, определяющие все i-насыщенные подмножества, и $[e]_i = [a_0]_i \cup_i \ldots \cup_i [a_m]_i$. Покажем, что e обладает требуемым свойством.

Неравенство $\psi_U(W_i) \leqslant_m \psi_U(R_{i,e})$ следует из того, что $W_i \setminus R_{i,e}$ конечно. Действительно, если $y \in W_i \setminus R_{i,e}$, то для некоторой финальной башни $(\mathcal{P}_k, \ldots, \mathcal{P}_0; \varphi_k, \ldots, \varphi_0) \in \mathfrak{S}$ и для некоторого $P \in \mathcal{P}_i$ $y \in P$, причем $e \notin \varphi_i(P)$. Последнее, по выбору e, означает, что $\varphi_i(P)$ не i-насыщенно, а так как $y \in W_i \cap P \neq \emptyset$, то существует лишь конечное число возможностей для P.

Для обратного неравенства достаточно описать эффективную процедуру, которая почти для всех $n \in R_{i,e}$ либо определяет, лежит n в U или нет, либо вычисляет $y \in W_i$, такой что $y \in U \leftrightarrow n \in U$. Эта процедура такова: получив на вход n, начинаем параллельно перечислять $V_n^{i,e}$, U и W_i, и если на некотором шаге n попадет в U, то даем ответ "$n \in U$", а если найдется $y \in V_n^{i,e} \cap W_i$, то даем на выходе этот y. Из определения $V_n^{i,e}$ следует, что для всех n, для которых процедура дает ответ, она работает корректно. Осталось показать, что почти для всех $n \notin U$ если $V_n^{i,e} \neq \emptyset$, то $V_n^{i,e} \cap W_i \neq \emptyset$.

Пусть $\mathcal{T} = (\mathcal{P}_k, \ldots, \mathcal{P}_0; \varphi_k, \ldots, \varphi_0)$ — финальная башня, $P \in \mathcal{P}_i$ и $n \in P$. Тогда $V_n^{i,e} = P$. Так как $n \notin U$, то $\mathcal{T} \in \mathfrak{S}$. Множество $\varphi_i(P)$ — атом в D_i, который содержит e и, значит, содержит a_j для некоторого $j \leqslant m$. Тогда, по лемме 5, если $\varphi_i(P)$ i-плотно, то оно i-насыщенно и $P \cap W_i \neq \emptyset$, а если $\varphi_i(P)$ не i-плотно, то существует лишь конечное число возможностей для P. □

Как показывает лемма 8, для $x \in D_i$ m-степень $\psi_U(R_{i,x})$ не зависит от выбора i. Обозначим эту степень через u_x. Опять же из леммы 8 следует, что множество m-степеней $\{u_x : x \in \mathbb{N}\}$ покрывает весь начальный сегмент m-степеней, лежащих под степенью U.

Лемма 9 *$u_x \leqslant_m u_y$ тогда и только тогда, когда $x \leqslant_\omega y$.*

■ Пусть $x \leqslant_\omega y$ и пусть $i \in \mathbb{N}$ таково, что $x, y \in D_i$ и $x \leqslant_i y$. Каждый атом в D_i, содержащий x, содержит также и y; следовательно, для любого n $V_n^{i,x} \subseteq V_n^{i,y}$ и $R_{i,x} \subseteq R_{i,y}$. Последнее означает, что $\psi_U(R_{i,x}) \leqslant_m \psi_U(R_{i,y})$ и $u_x \leqslant_m u_y$.

Докажем лемму в другую сторону. Пусть $x \not\leqslant_\omega y$. Тогда для каждого i, такого что $x, y \in D_i$, в D_i существует атом, содержащий x и не содержащий y; следовательно, существует бесконечно много хороших каркасов $(\mathcal{A}_k, \ldots, \mathcal{A}_0; c_k, \ldots, c_1)$, таких что для $A \in \mathcal{A}_k$ $x \in A$ и $y \notin A$.

Покажем, что для каждого $e \in \mathbb{N}$ требование $R_{x,y,e}$ окажется связанным с некоторой финальной башней. Пусть это не верно и пусть $R_{x,y,e}$ — наименьшее требование, для которого это не так. Пусть s — такой шаг, что для всех R-требований, меньших $R_{x,y,e}$, которые когда-либо связываются с финальными башнями, соответствующая башня уже стоит. Пусть на шаге $5t > s$ строится башня с каркасом $(\mathcal{A}_k, \ldots, \mathcal{A}_0; c_k, \ldots, c_1)$, таким что для $A \in \mathcal{A}_k$ $x \in A$ и $y \notin A$, которая впоследствии станет финальной. Но тогда на этом шаге мы свяжем с ней требование $R_{x,y,e}$, так как все существующие к шагу $5t$ башни являются финальными (или станут таковыми после конечного числа преобразований), требование $R_{x,y,e}$ свободно для строящейся башни, а все меньшие требования уже заняты башнями с меньшим модулем.

Пусть p, q — наименьшие числа, для которых $x \in D_p, y \in D_q$ соответственно. Покажем, что $\psi_U(R_{p,x}) \not\leqslant_m \psi_U(R_{q,y})$. Если это не так, то для некоторого e $\delta f_e = R_{p,x}$, $\rho f_e \subseteq R_{q,y}$ и $z \in U \leftrightarrow f_e z \in U$. Пусть $\mathcal{T}$ — финальная башня, с которой связано требование $R_{x,y,e}$ и $X = c(\mathcal{T}, x)$. Ясно, что $X \subseteq R_{p,x}$, так что $X \subseteq \delta f_e$. По лемме 4 найдется такое s, что башня $\mathcal{T}$ на шаге s существует (и является финальной), $X \subseteq \delta f_e^s$, все числа из $f_e(X)$ уже использованы, $[X \cup f_e(X)] \cap U^s = [X \cup f_e(X)] \cap U$ и требование $R_{x,y,e}$ удовлетворено. Значит, найдется $z \in X$, такой что либо $z \in U \leftrightarrow f_e z \notin U$, либо $\mathrm{base}(\mathcal{T}) \not\subseteq U$ и $f_e z \in \mathrm{base}(\mathcal{T})$. В обоих случаях мы имеем противоречие с выбором f_e; во втором случае противоречие связано с тем, что $\mathrm{base}(\mathcal{T}) \cap R_{q,y} = \emptyset$. □

Таким образом, главный идеал полурешетки m-степеней, порожденный m-степенью U, изоморфен $\mathcal{L}$. Остается только доказать последнюю лемму.

Лемма 10 *Множество U гиперпросто.*

■ U имеет бесконечное дополнение, так как $\mathcal{L}$ не одноэлементна и, следовательно, U не вычислимо. Значит, лемма будет доказана, если мы покажем, что для каждого $e \in \mathbb{N}$, такого что W_e бесконечно и для любых различных $x, y \in W_e$ $H_x \cap H_y = \emptyset$, требование P_e удовлетворится на некотором шаге.

Пусть W_e бесконечно, для $x \neq y \in W_e$ $H_x \cap H_y = \emptyset$ и требование P_e не удовлетворяется ни на каком шаге. Выберем наименьшее e с этим свойством и $x \in W_e$, такой что элементы H_x не лежат в основаниях финальных башен, модуль которых меньше либо равен e. Пусть $s = 5t + 4$ — настолько большой шаг, что $e \leqslant s$, все финальные башни с модулями, не большими e, существуют, модули всех остальных башен на шаге s больше чем e, $x \in W_e^s$, все элементы из H_x уже использованы и все требования P_d с $d < e$, которые когда-либо удовлетворяются, уже удовлетворены. Тогда на шаге s удовлетворится P_e. Противоречие. □

Лемма 10 завершает доказательство теоремы 1. □

§ 3. Начальные сегменты и интервалы в полурешетках Роджерса.

В этом параграфе мы получим несколько следствий из теоремы 1, относящихся к локальному строению полурешеток Роджерса.

До конца параграфа зафиксируем $n \geqslant 2$ и семейство арифметических множеств $\mathcal{F} \subseteq \Sigma_n^0$, такое что $\mathcal{F}$ содержит более одного элемента и полурешетка

Роджерса $\mathcal{R}_n^0(\mathcal{F})$ непуста. Известно, что в этом случае $\mathcal{R}_n^0(\mathcal{F})$ бесконечна и не является решеткой.

В работе [7] доказано, что для любой нумерации α из $\mathcal{R}_n^0(\mathcal{F})$ существует β из $\mathcal{R}_n^0(\mathcal{F})$, такая что $\beta \equiv_{0'} \alpha$ и главный идеал в $\mathcal{R}_n^0(\mathcal{F})$, порожденный β, изоморфен главному идеалу полурешетки m-степеней, порожденному U (без наименьшего элемента, если $\mathcal{F}$ бесконечно), где U — произвольное иммунное Δ_2^0-множество.

Так как в полурешетке m-степеней существует естественный автоморфизм, переводящий m-степень произвольного множества в m-степень его дополнения, то справедливы следующие следствия теоремы 1.

Следствие 2 *Для произвольной лахлановской полурешетки $\mathcal{L}$ в $\mathcal{R}_n^0(\mathcal{F})$ существует главный идеал, изоморфный $\mathcal{L}$, если $\mathcal{F}$ конечно, и $\mathcal{L}$ без наименьшего элемента, если $\mathcal{F}$ бесконечно.*

Следствие 3 *Для произвольной лахлановской полурешетки $\mathcal{L}$ в $\mathcal{R}_n^0(\mathcal{F})$ существует главный идеал, изоморфный $\mathcal{L}$.*

■ Лахлановская полурешетка с присоединенным к ней внешним образом наименьшим элементов также является лахлановской. □

Следствие 4 *Если $\nu \in \mathcal{R}_n^0(\mathcal{F})$ не является наибольшим элементом $\mathcal{R}_n^0(\mathcal{F})$ относительно $0'$-сводимости, то для произвольной лахлановской полурешетки $\mathcal{L}$ найдется $\mu \in \mathcal{R}_n^0(\mathcal{F})$, такая что интервал $[\nu, \mu]$ изоморфен $\mathcal{L}$.*

■ Выберем $\alpha \in \mathcal{R}_n^0(\mathcal{F})$ так, чтобы $\alpha \not\leqslant_{0'} \nu$. Пусть U — иммунное Δ_2^0-множество, для которого начальный сегмент m-степеней, порожденный m-степенью U, изоморфен $\mathcal{L}$ (например, дополнение к множеству, построенному в теореме 1). Пусть β — нумерация, построенная по α в работе [7]. Анализируя доказательство из работы [7], можно заметить, что помимо упомянутого выше свойства нумерация β удовлетворяет также следующим трем:

c1) если $\psi_U(W_i) = 0$, то β_{W_i} — разрешимая нумерация некоторого конечного подсемейства $\mathcal{F}$;

c2) если $\psi_U(W_i) \neq 0$, то β_{W_i} — нумерация всего семейства $\mathcal{F}$ и $\alpha \equiv_{0'} \beta_{W_i}$;

c3) если $\psi_U(W_j) \neq 0$, то $\psi_U(W_i) \leqslant_m \psi_U(W_j) \Leftrightarrow \beta_{W_i} \leqslant \beta_{W_j}$.

Положим $\mu = \nu \oplus \beta$ и покажем, что μ удовлетворяет требуемым свойствам. Определим отображение из идеала полурешетки m-степеней, порожденного U, в интервал $[\nu, \mu]$, заданное правилом $\psi_U(W_i) \mapsto \nu \oplus \beta_{W_i}$. Из **c1**, **c3** следует, что оно определено корректно и является гомоморфизмом верхних полурешеток.

Это отображение является также эпиморфизмом. Действительно, если $\gamma \in [\nu, \mu]$, то $\gamma \equiv \mu_A$ для некоторого рекурсивно перечислимого A. Так как $\nu \leqslant \gamma$, то можно считать, что $2\mathbb{N} \subseteq A$. Кроме того, можно считать, что A содержит хотя бы одно нечетное число, так как добавление к A произвольного конечного множества ничего не меняет. Значит, γ является образом $\psi_U(W_i)$, где $W_i = \{x : 2x+1 \in A\}$.

Остается лишь показать, что если $\psi_U(W_i) \nleqslant_m \psi_U(W_j)$, то $\nu \oplus \beta_{W_i} \nleqslant \nu \oplus \beta_{W_j}$. Пусть $\nu \oplus \beta_{W_i} \leqslant \nu \oplus \beta_{W_j}$. Тогда $\beta_{W_i} \leqslant \nu \oplus \beta_{W_j}$ и существует частичная вычислимая функция f, такая что $\delta f = W_i$, $\rho f \subseteq 2\mathbb{N} \cup \{2x+1 : x \in W_j\}$ и для $x \in W_i$ $\beta x = (\nu \oplus \beta)(fx)$. Пусть $A = \{x : fx \text{ четно}\}$. Можно считать, что $A, W_i \setminus A \neq \emptyset$, при необходимости дополнив W_i конечным числом элементов и исправив f на конечном множестве аргументов. Имеем $\psi_U(A) = 0$, так как иначе, по **c2**, $\alpha \equiv_{0'} \beta_A \leqslant \nu$. Также ясно, что $W_i \setminus A$ рекурсивно перечислимо и $\beta_{W_i \setminus A} \leqslant \beta_{W_j}$. Если $\psi_U(W_j) \neq 0$, то, по **c1**, **c2** $\beta_A \leqslant \beta_{W_j}$, $\beta_{W_i} \equiv \beta_A \oplus \beta_{W_i \setminus A} \leqslant \beta_{W_j}$ и, по **c3**, $\psi_U(W_i) \leqslant_m \psi_U(W_j)$. Наконец, пусть $\psi_U(W_j) = 0$. Тогда, по **c1**, $\beta_{W_j} \leqslant \nu$ и опять же, по **c2**, $\psi_U(W_i \setminus A) = 0$, так как иначе $\alpha \equiv_{0'} \beta_{W_i \setminus A} \leqslant \beta_{W_j} \leqslant \nu$. Но тогда $\psi_U(W_i) = \psi_U(A) \cup \psi_U(W_i \setminus A) = 0$ и $\psi_U(W_i) \leqslant_m \psi_U(W_j)$. $\Box$

Список литературы

[1] Бадаев, С. А., Гончаров, С. С., О полурешетках Роджерса семейств арифметических множеств, *Алгебра и Логика*, **40**, No. 5, 507–522, 2001.

[2] Badaev, S. A., Goncharov, S. S., Podzorov, S. Yu., Sorbi, A., Algebraic properties of Rogers semilattices of arithmetical numberings, *Computability and Models*, 45 - 77, Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2003.

[3] Гончаров, С. С., Сорби, А., Обобщенно вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса, *Алгебра и Логика*, **36**, No. 6, 621 – 641, 1997.

[4] Денисов, С. Д., Строение верхней полурешетки рекурсивно перечислимых m-степеней и смежные вопросы. 1, *Алгебра и Логика*, **17**, No. 6, 643 – 683, 1978.

[5] Ершов, Ю. Л., *Теория нумераций*, Наука, Москва, 1977.

[6] Lachlan, A. H., Recursively enumerable many-one degrees, *Алгебра и Логика*, **11**, No. 3, 326 – 358, 1972.

[7] Подзоров, С. Ю., Начальные сегменты в полурешетках Роджерса Σ^0_n-вычислимых нумераций, *Алгебра и Логика*, **42**, No. 2, 211 – 225, 2003.

[8] Роджерс, Х., *Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость*, Мир, Москва, 1972.