al-Farabi Kazakh National University

Workshop on Computability and Model Theory

Школа по вычислимости и теории моделей

Almaty – 2002

Preface

Workshop "Computability and Models" is a part of the international joint research projects INTAS-RFBR-97-139 COMPUTABILITY AND MODELS and INTAS-00-499 COMPUTABILITY IN HIERARCHIES AND TOPOLOGICAL SPACES. It is organized under the aegis of the Kazakh National University and the Institute of Mathematics of the Ministry of Education and Science of Kazakhstan.

The three earlier INTAS workshops on computability and models (Novosibirsk, May 4-6, 2000; Heidelberg, January 18-19, 2001; Novosibirsk, September 24-26, 2001) have established a tradition of inviting a wide spectrum of specialists in computability theory, and its applications to logic, mathematics, and computer science. This workshop is the final one for the project INTAS-RFBR-97-139, and some talks summarize the results of the researches over the previous three years. The workshop is mainly devoted to the computability theory and its applications to logic and computer science, and includes also several talks on model theory.

Proceedings of the workshop contain abstracts of the talks or extended reflection of the talks or their parts prepared as articles. Abstracts and articles were preliminary refereed, nevertheless they should be considered only as publications "as is".

We thank to A.Sakhauev, A.Altaeva, R.Zhumakhanova who assisted with the preparation of this volume.

Serikzhan Badaev
Yerzhan Baisalov

Editors
June 21, 2002

Предисловие

Школа по вычислимости и моделям предусмотрена программами двух международных исследовательских проектов Европейского сообщества ИНТАС-РФФИ-97-139 COMPUTABILITY AND MODELS и ИНТАС-00-499 COMPUTABILITY IN HIERARCHIES AND TOPOLOGICAL SPACES. Она организована на базе Казахского национального университета и Института математики Министерства образования и науки Казахстана.

Предыдущие школы ИНТАС по вычислимости и моделям (Новосибирск, 4-6 мая 2000 г.; Гейдельберг, 18-19 января 2001 г.; Новосибирск, 24-26 сентября 2001 г.) заложили традицию привлечения к работе школы широкого круга специалистов по теории вычислимости и ее приложениям в логике, математике и computer science. Настоящая школа является заключительной по проекту ИНТАС-РФФИ-97-139, и поэтому некоторые доклады посвящены итогам работы по этому проекту за предыдущие три года. Работа школы посвящена главным образом проблемам теории вычислимости и ее приложениям в логике и в computer science, и в то же время ряд докладов относится к теории моделей.

Труды школы содержат как абстракты докладов, так и развернутое изложение докладов или их частей, оформленное в виде статей. Хотя все абстракты и статьи прошли предварительное рецензирование, их лучше рассматривать как публикации "as is".

Мы выражаем благодарность А.Сахауеву, А.Алтаевой, Р.Жумахановой за помощь подготовке этого сборника.

Редакторы
С.А. Бадаев
Е.Р. Байсалов

21 июня, 2002 г.

Program of Workshop "Computability and Models"

Monday, June 24, 2002

- Sergey Goncharov (Russia), Computability and Autostability
- Julia Knight (USA), Isomorphism Problems
- Dieter Spreen (Germany), On the Effective Continuity of Effective Multifunctions
- Pavel Alaev (Russia),Computable Homogenious Boolean Algebras
- Asylkhan Khisamiev (Russia), Computable Imbeddability Condition and Degrees of Abelian Groups and Boolean Algebras
- Yerzhan Baisalov (Kazakhstan), On Erdos-Woods Conjecture
- Oleg Kudinov (Russia),
- Perdebek Dosanbai (Kazakhstan), Definability in Arithmetical Structures

Tuesday, June 25, 2002

- John Case (USA), A Computability-Theoretic Learning Theory Sampler
- Frank Stephan (Germany), Learning Classes of Approximations to Non-Recursive Functions
- Iskander Kalimullin (Russia), The Jump Operator Is Definable in the Enumeration Degrees
- Marat Arslanov (Russia), Relatively c.e., n-c.e. and Fixed-point Free Degrees

- Nazif Khisamiev (Kazakhstan), Vitalii Roman'kov (Russia), Constructive Matrix and Ordered Groups
- Anna Romina (Kazakhstan), Autostability of Models in Admissible Structures
- Dzhamalbek Tusupov (Kazakhstan), Generalized Computability on Countable Atom Boolean Algebras

Thursday, June 27, 2002

- John Case (USA), Machine Learning for a Genomics Analogy Problem
- Klaus Keimel (Germany), Domain Theoretical Models for Probability and Measure
- Serikzhan Badaev (Kazakhstan), Arithmetical Numberings
- Vyacheslav Dobritsa (Kazakhstan), On the Limitly Constructible Models
- Pavel Semukhin (Russia), Spectrum of the Atomless Elements Ideal
- Kuanysh Meirembekov (Kazakhstan), Ryll-Nardzewski Function of Countably Categorical Theories
- Beibut Kulpeshov (Kazakhstan), On Some Properties of Weakly o-minimal Theories
- Stanislav Bereznyuk (Russia), On Hyperarithmetical Numberings

Friday, June 28, 2002

- Mikhail Peretyat'kin (Kazakhstan), Lindenbaum Algebra of Predicate Logic and Its Structure
- Sergei Podzorov (Russia), Algebraic Properties of Rogers Semilattices of Arithmetical Numberings
- Asel Altaeva (Kazakhstan), Precomplete Arithmetical Equivalences
- Zarif Khisamiev (Kazakhstan), On Completion of Arithmetical Numberings

Conference Participants

Arslanov, Marat
Kazan State University
Department of Mathematics
ul. Kremlevskaya 18
420008 Kazan
Russia
Marat.Arslanov@ksu.ru

Badaev, Serikzhan
Kazakh National University
Dept. of Mech. and Math.
ul. Masanchi 39/47
480012 Almaty
Kazakhstan
badaev@math.kz

Baisalov, Yerzhan
Kazakh National University
Dept. of Mech. and Math.
ul. Masanchi 39/47
480012 Almaty
Kazakhstan
yerzhan_baisal@hotmail.com

Bereznyuk, Stanislav
Academy of Sciences
Siberian Branch
Institute of Mathematics
630090 Novosibirsk
Russia
bereznuk@math.nsc.ru

Case William, John
CIS Department
University of Delaware
Newark, DE 19716
USA
case@cis.udel.edu

Cooper, Barry
University of Leeds
School of Mathematics
Leeds LS2 9JT
England
pmt6sbc@leeds.ac.uk

Dobritsa, Vyacheslav
Almaty University
480012 Almaty
Kazakhstan
dobritsa@mail.ru

Dosanbai, Perdebek
Kazakh National University
Dept. of Mech. and Math.
ul. Masanchi 39/47
480012 Almaty
Kazakhstan
dosanbai@mail.ru

Conference Participants

Kalimullin, Iskander
Kazan State University
Department of Mathematics
ul. Kremlevskaya 18
420008 Kazan
Russia
Iskander.Kalimullin@ksu.ru

Kassymkanuly, Boribai
8 mikrorayon 3-58
458014 Kostanai
Kazakhstan
boribay@mail.ru

Khisamiev, Asylkhan
Academy of Sciences
Siberian Branch
Institute of Mathematics
630090 Novosibirsk
Russia
hisamiev@math.nsc.ru

Khisamiev, Nazif
East-Kazakhstan
Technical University
pr. Lenina 51-316
492018 Ust'-Kamenogorsk
Kazakhstan
hisamiev@mail.ru

Khisamiev, Zarif
Kazakh National University
Dept. of Mech. and Math.
ul. Masanchi 39/47
480012 Almaty
Kazakhstan
RinHis@Land.ru

Keimel, Klaus
Fachbereich Mathematik
Arbeitsgruppe 14
Technische Universit Darmstadt
Schloszgartenstrasze 7
64289 Darmstadt, Germany
keimel@mathematik.tu-darmstadt.de

Knight, Julia F.
University of Notre Dame
Dep. of Mathematics
255 Hurley Hall
Notre Dame
IN 16556-4616 U.S.A.
knight.1@nd.edu

Kudinov, Oleg
Academy of Sciences
Siberian Branch
Institute of Mathematics
630090 Novosibirsk
Russia
kudinov@mayth.nsc.ru

Conference Participants

Kulpeshov, Beibut
Informatics and Control
Problems Institute
ul. Pushkina 125
Almaty 480100
Kazakhstan
kbsh@ipic.kz

Meirembekov, Kuanysh
Kazakh National University
Dept. of Mech. and Math.
ul. Masanchi 39/47
480012 Almaty
Kazakhstan

Nurtazin, Abyz
Kazakh National University
Inst. of Mech. and Math.
ul. Masanchi 39/47
480012 Almaty
Kazakhstan

Omarov, Amangeldy
Kazakh National University
Dept. of Mech. and Math.
ul. Masanchi 39/47
480012 Almaty
Kazakhstan

Peretyatkin, Mikhail
Kazakh Academy of Sciences
Institute of Mathematics
ul. Pushkina 125
Almaty 480021
Kazakhstan
peretya@math.kz

Podzorov, Sergey
Academy of Sciences
Siberian Branch
Institute of Mathematics
630090 Novosibirsk
Russia
podz@math.nsc.ru

Roman'kov, Vitalii
Omsk University
pr. Mira 55B
644077 Omsk
Russia
romankov@math.omsu.omskreg.ru

Romina, Anna
Kazakh National University
Dept. of Mech. and Math.
ul. Masanchi 39/47
480012 Almaty
Kazakhstan

Semukhin, Pavel
Academy of Sciences
Siberian Branch
Institute of Mathematics
630090 Novosibirsk
Russia
paulsem@ngs.ru

Solon, Boris
Ivanovo State University
Ivanovo, Russia
solon@icti.ivanovo.su

Conference Participants

Sorbi, Andrea
Dip. di Matematica
Via del Capitano 15
I-53100 Siena
Italy
sorbi@unisi.it

Spreen, Dieter
Fachbereich Mathematik
Theoretische Informatik
Universitat Siegen
Holderlinstr. 3
D-57068 Siegen
Germany
spreen@informatik.uni-siegen.de

Stephan, Frank
Mathematisches Institut
Universitaet Heidelberg
Im Neuenheimer Feld 294
D-69120 Heidelberg
Germany
frank.stephan@urz.uni-hd.de

Talasbaeva, Zhuldyz
Kazakh National University
Dept. of Mech. and Math.
ul. Masanchi 39/47
480012 Almaty
Kazakhstan

Yang, Yue
Department of Mathematics
National University
of Singapore
Singapore 119260
matyangy@leonis.nus.edu.sg

Computable homogeneous Boolean algebras

Pavel Alaev
Novosibirsk, Russia

Abstract

We propose a criterion indicating when a homogeneous Boolean algebra has a computable copy. Andrei Morozov proved that such an algebra can be described by an invariant which is a subset of the set of natural numbers. We introduce a hierarchy of Δ^0_w-sets which generalizes Feiner's hierarchy. A countable homogeneous Boolean algebra has a computable copy if and only if its invariant belongs to a class of this hierarchy. A way to pass from a hyperarithmetical quotient Boolean algebra to a computable Boolean algebra is also considered.

In 1970 Feiner introduced a hierarchy of Δ^0_ω-functions (Feiner's hierarchy): suppose that $f : \omega \to \omega$ and $a, b \in \omega$. f belongs to the class (a, b) if

$$f(n) = \phi_k^{\emptyset^{(a+bn)}}(n)$$

for some $k \in \omega$. The idea can be formulated as follows: to compute $f(n)$, we fix a Turing machine but use an oracle which depends on n.

We can also consider functions f such that $f(n) = \phi_k^{\emptyset^{(h(n))}}(n)$, where h is a computable function, not necessarily linear (this generalizes the Feiner's hierarchy). To describe the computable homogeneous Boolean algebras, we use a more general approach: the oracle in the computation of $f(n)$ depends on n and $f(0), \ldots, f(n-1)$.

Let $g : \omega \to \omega$ be a computable function such that $g(x) \geqslant 1$ for $x \in \omega$, and let $\langle \cdot, \ldots, \cdot \rangle : \omega^{<\omega} \to \omega$ be the standart function. The class $\Delta^0_{\omega,g}$ consists of all functions $f : \omega \to \omega$ such that for some $k \in \omega$,

$$f(n) = \phi_k^{\emptyset^{(g(s)-1)}}(s)$$

where $s = \langle f(0), \ldots, f(n-1) \rangle$.
A set $M \in \Delta^0_{\omega,g}$ if $\chi_M \in \Delta^0_{\omega,g}$.
The class $\Sigma^0_{\omega,g}$ consists of all sets $M \subseteq \omega$ such that

$$\chi_M(n) = 1 \Leftrightarrow \phi_k^{\emptyset^{(g(s)-1)}}(s)\downarrow$$

where $s = \langle \chi_M(0), \ldots, \chi_M(n-1) \rangle$.

Examples. (1) if $g(x) = m$ for all $x \in \omega$, then $\Delta^0_{\omega,g} = \Delta^0_m$ and $\Sigma^0_{\omega,g} = \Sigma^0_m$;
(2) if $g(\langle x_0, \ldots, x_{n-1} \rangle) = an + b + 1$, where $a, b \in \omega$, then $\Delta^0_{\omega,g}$ is a Feiner's class.

The following proposition says that these classes have a usual property.

Proposition. Let $g_1, g_2 : \omega \to \omega$ be computable functions such that $1 \leqslant g_1(x) < g_2(x)$ for all $x \in \omega$. Suppose that $g_2(\langle x_0, \ldots, x_n \rangle) \leqslant g_2(\langle x_0, \ldots, x_n, x_{n+1} \rangle)$ for all $x_0, \ldots, x_{n+1} \in \omega$. Then there exists an $M \in \Delta^0_{\omega,g_2} \setminus \Sigma^0_{\omega,g_1}$.

By algebra we mean a countable Boolean algebra. Let $\mathrm{ch}(A) = (\mathrm{ch}_1(A), \mathrm{ch}_2(A), \mathrm{ch}_3(A))$ be the elementary characteristic of an algebra A, where $\mathrm{ch}_1(A) \in \omega \cup \{\infty\}$. A. Morozov proved (1982):
(1) if A is a homogeneous algebra and $\mathrm{ch}_1(A) < \infty$, then A has a computable (even decidable) copy;
(2) if A is a homogeneous algebra and $\mathrm{ch}_1(A) = \infty$, then A can be defined up to isomorphism by a sequence of invariants $t(A), p_0(A), p_1(A), \ldots, p_n(A), \ldots$, where $t(A) \in \{1, 2, 3\}$, $p_n(A) \in \{0, 1\}$ for $n \in \omega$.

Theorem. Let A be a homogeneous algebra such that $\mathrm{ch}_1(A) = \infty$. The following are equivalent:
(1) A has a computable copy;
(2) $\{n \mid p_n(A) = 1\} \in \Sigma^0_{\omega,g}$, where $g(\langle x_0, \ldots, x_n \rangle) = 4 + 3(n+1) + x_0 + \ldots + x_n$.

As a corollary, we obtain a strong version of a Feiner's result:

Corollary. There is a Δ^0_2-computable homogeneous algebra having no computable copy.

Precomplete arithmetical equivalence relations

Assel Altaeva
al-Farabi Kazakh National University, Almaty

Abstract

We study arithmetical equivalence relations (a.e.r.) on ω and investigate the possibility to modify main results for positive equivalence relations concerning reducibility, completeness and properties of equivalence relations for relations in arithmetical hierarchy considering $\sum^0_{n+1} -$ equivalence relations generated by some function computable with $\emptyset^{N-1}$. Particularly, such approach allows us to show that precomplete arithmetical equivalence relations are computably isomorphic to each other.

Introduction

Our primary goal in this paper is to develop comprehensive theory for reducibility among a.e.r., to study different notions of completeness for a.e.r. and properties of precomplete a.e.r.

The research work was to a large extent motivated by the theory of computably enumerable equivalence relations (positive e.r.) rather developed by Ershov[1],Visser[2], who studied examples of precomplete positive e.r. in logic, Bernardi and Sorbi[3] investigating universality of positive e.r. and Lachlan [4] who showed that precomplete positive e.r. are computably isomorphic to each other. He also considered another natural notion of completeness (called e-complete) and demonstrated nice properties and natural examples of e-complete positive e.r. There are direct connections between positive e.r. and a.e.r. as positive e.r. are just a subcase of a.e.r., so the general methodology we employ in the current investigation is much similar to the theory of positive equivalence relations.

The most interesting applications of the theory of equivalence are often classification problems for various kinds of structure in mathematics.

Furthermore, to classify a structure is usually meant to obtain a complete set of invariants for the structure. What we are investigating about a.e.r. under reducibility can then be viewed as an abstract framework for a study of the possibilities to effectively compute complete invariants. In this sense our reducibility is more natural than the reducibility among sets.

An a.e.r. can be viewed as a $\sum^0_{n+1}-$ partitioning of the ω. Hence the reducibility among a.e.r. as equivalence relations generalizes various notions of simultaneous reduction of sequences of sets. Also, natural non-universal a.e.r. are easy to construct(similar to positive equivalence relations) . This is in contrast with situation in computability theory for sets, where sophisticated constructions are usually needed to ensure existence.

Definition 1. An equivalence relation R on ω is arithmetical if R is a $\sum^0_{n+1}$ −relation for some n.

Definition 2. For two a.e.r. R_1 and R_2, we say that R_1 is m-reducible to R_2, and denote $R_1 \leqslant_m R_2$ if there is a computable function f such that for any $x, y \in N, xR_1y \Leftrightarrow f(x)R_2f(y)$.

Further we omit the prefix and say that R_1 is reducible to R_2. When we do this, the reducibility is meant to be many-one.

Note that this reducibility is a stronger notion than the ordinary reducibility among sets. Thus the following notion of "completeness" is stronger than the corresponding concept for sets.

Definition 3. Non-trivial $\sum^0_{n+1}-$ relation R is called precomplete if for every partial computable function φ, there is a total computable function F such that, $\varphi(n)RF(n)$ for all $n \in dom\varphi$.

Ershov in [1] observed that, if φ is a universal unary partial computable function and R is the least equivalence relation containing graph of φ,then R is precomplete.

Visser [2] pointed out that natural examples of precomplete equivalence relations occur in the context of λ-calculus and Peano arithmetic. In particular, if m$\rightarrow$A$_m$is an effective numbering of the $\sum^0_n$ −sentences of any sufficiently strong axiomatizable first-order theory T, then the relation $\sim_n=\{\langle l, m\rangle :\vdash_T \mathrm{A}_l \leftrightarrow A_m\}$ is precomplete. Let m$\rightarrow$B$_m$ be an effective numbering of all sentences of T and $\sim_T=\{\langle l, m\rangle :\vdash_T \mathrm{B}_l \leftrightarrow \mathrm{B}_m\}$. However Bernardi and Sorbi showed that $\sim_T$ is not precomplete, since negation affords a total recursive diagonal function for $\sim_T$ (see [3, p. 534]).

Indices for a.e.r.

If ψ is a partial computable function and $n \in \omega$, then ψ^n denotes partial computable function obtained by n iterated compositions of ψ. This can be

defined precisely by induction on n: $\psi^0(x) = x$ and $\psi^{n+1}(x) = \psi(\psi^n)(x)$, for any $x \in \omega$.

For every $n \in \omega$ the set of all $\sum_n^0$-equivalence relations is $\sum_n^0$-computable. Let R_e be arithmetical equivalence relation generated by the set $\{(x,y)|\langle x,y\rangle \in W_e^{0^{n-1}}\}$, where $W_e^{0^{n-1}}$-enumerable set, computable with $\mathbf{0}^{n-1}$ oracle.

There are other procedures which can generate all a.e.r. from $\sum_n^0$ class. Following Ershov's [1] notations we define a.e.r. as:

Definition 4. For each function f computable with $\mathbf{0}^{n-1}$ oracle, define the a.e.r. η_f by $x\eta_f y \rightleftharpoons \exists n, m(f^n(x) \downarrow = f^m(x) \downarrow)$, $x, y \in \omega$.

Then η_f is a.e.r. generated by the graph of f, if e is an index for f,then we also write η_f as η_e, and we call e the iterative $\sum_n^0$- index for η_e.

We note below that these two indexing systems are essentially the same.

Definition 5. Equivalence relations R, S are computably isomorphic ($R \cong S$) if there exists a computable permutation H such that xRy iff $H(x)SH(y)$.

Proposition.

There is a computable isomorphism ρ such that $\eta_e \equiv R_{\rho(e)}$.

Proof. From the proof of Ershov's result follows, in fact it is not hard to see directly, that $\exists 1 - 1 f(k,e)$ 0^{n-1}-computable function: $R_e = \eta_{f(k,e)}$ for any $k, e \in \omega$. Similarly, there is a one-one computable function $g(k,e)$ such that $\eta_e = R_{g(k,e)}$ for any $k, e \in \omega$. With this padding property it is then routine to define a computable isomorphism ρ by a back-and-forth construction as follows.

Let $\rho(0) = f(0,0)$. If $f(0,0) = 0$ then $\rho^{-1}(0)$ to be $g(k,0)$ where k is the least such that $g(k,0) \neq 0$. In general suppose both ρ and ρ^{-1} are defined for $i < k$. If $k \in \{\rho^{-1}(0), ..., \rho^{-1}(k-1)\}$ then $\rho(k)$ is already defined. Otherwise let $\rho(k)$ be $f(m,k)$ where m is the least such that $f(k,n) \notin \{\rho(0), ..., \rho(k-1)\}$. Then in similar way define $\rho^{-1}(n)$. The resulting ρ is one-one,onto and computable. □

Theorem 1. *Any two precomplete $\sum_{n+1}^0$-equivalence relations are computably isomorphic.*

Proof. We follow Lachlan's ideas and notations from [4]. Let R, S be precomplete $\sum_{n+1}^0$- equivalence relations. Suppose given a simultaneous enumeration with $\mathbf{0}^{n-1}$-oracle of R and S such that at each stage exactly one pair is enumerated in either R or S but not both and such that $\langle i,j\rangle$ with $i \neq j$ is enumerated in R or S only if both $\langle i,i\rangle$ and $\langle j,j\rangle$ have already been enumerated in R or S respectively. Let ϕ, ψ be partial computable functions.

The fixed point theorem allows us to find unary computable functions F,G such that F "makes φ total" with respect to R and G "makes ψ total" with respect to S.We will effectively enumerate the graphs of permutation H and unary partial computable functions φ, ψ. The finite approximations to H, φ and ψ which have been enumerated by the end of stage k are denoted H_k, φ_k and ψ_k.

In stage k we define equivalence relations $R_k \subseteqq R$ on domH_k and $S_k \subseteqq S$ on rngH_k such that H_k is an isomorphism between $\langle \mathrm{fld}R_k, R_k\rangle$ and $\langle \mathrm{fld}S_k, S_k\rangle$. Each equivalence class of $R_k(S_k)$ will be designated as left or right in such a way that C is a left class of R_k iff $H_k(C)$ is a left class of S_k. If c is a left (right) class of $R_k(S_k)$ a number c is associated with C such that $F(c) \in C(G(C) \in C)$ and $c \notin \mathrm{dom}\varphi_k(\mathrm{dom}\psi_k)$. At any stage of the construction c is associated with at most one left class of R_k and with at most one right class of S_k.

Let a_0, a_1, b_0, b_1 be chosen such that $\langle a_0, a_1\rangle \notin R$ and $\langle b_0, b_1\rangle \notin S$.

In **Stage 0.** Let everything be empty.

Stage k+1. Let $\langle i, p\rangle$ be enumerated in R or S at stage k. If $\langle i, p\rangle \in R_k$ or S_k respectively, do nothing at stage $k+1$. The other cases are:

Case 1. $i = p$ and $\langle i, i\rangle$ is enumerated in R. Let c be the least number such that $\psi_k(c)$ is undefined, c is not associated with any right class of S_k and $j \in G(c) \notin \mathrm{rng}H_k$. Let $H_{k+1} = H_k \bigcup \langle i, j\rangle, R_{k+1} = R_k \bigcup \langle i, i\rangle, S_{k+1} = S_k \bigcup \langle j, j\rangle$, and {j} be a right class of S_{k+1} with associated number c.Let everything else be the same as at the end of stage k.

Case 2. $i \neq p$ and $\langle i, p\rangle$ is enumerated in R. By choice of the enumeration of R and S, $\langle i, i\rangle$ and $\langle p, p\rangle$ have already been enumerated in R. Therefore $i, p \in \mathrm{fld}R_k$. Let C, D be the R_k-classes of i, p respectively. Let c be the number associated with C or $H_k(C)$ according as C is a left or right class. Let d be the number associated with D or $H_k(D)$ according as D is a left or right class.

Subcase 2.1. C and D are both right classes. Let $H_{k+1} = H_k$, R_{k+1} be the least equivalence relation on fldR_k such that $R_{k+1} \supseteqq R_k \cup \langle i, p\rangle$, $S_{k+1} = H_k(R_{k+1})$, $\psi_{k+1} = \psi_k \cup \langle d, G(c)\rangle$, and $\phi_{k+1} = \phi_k$. Let c be the number associated with the new equivalence class $H(C \cup D)$ which is designated as a right class of S_{k+1}. The other classes are designated as at the end of stage k.(Note: Making $\psi(d) = G(c)$ forces $G(c)SG(d)$. Since G makes ψ total for S).

Subcase 2.2. C and D are both left classes. Let $\phi_{k+1}(c) = a_0$ and $\phi_{k+1}(d) = a_1$.(Since $i, F(c) \in C; p, F(d) \in D$ and iRp, we obtain

$F(c)RF(d)$. This contradicts F making ϕ total for R. Thus we need go no further, because, use of the fixed point theorem prevents this happening)

Subcase 2.3. C is a left class and D is a right class. Let $H_{k+1} = H_k$, R_{k+1} be the least equivalence relation on fldR_k such that $R_{k+1} \supseteq R_k \cup \{\langle i, p\rangle\}$, $S_{k+1} = H_k(R_{k+1}), \psi_{k+1} = \psi_k \cup \{\langle d, H(F(c))\rangle\}$, and $\phi_{k+1} = \phi_k$. Let c be the number associated with the new equivalence class $C \cup D$ of R_{k+1} which is designated a left class. The other classes are designated as at the end of stage k. (Note: Making $\psi(d) = H(F(c))$ forces $H(F(c)SG(d)$ so that $H(C \cup D)$ will be included in an equivalence class of S).

Subcase 2.4. C is a right class and D is left class. Let everything be as in the previous subcase c and d interchanged and C and D interchanged.

Case 3. $i = p$ and $\langle i, i\rangle$ is enumerated in S. Similar to Case 1.

Case 4. $i \neq p$ and $\langle i, p\rangle$ is enumerated in S. Similar to Case 2.

This completes the construction. Cases 1 and 3 ensure that dom$H$=rng$H$=ω. Since H_k is 1-1 for all k, H is a recursive permutation. Let R_ω denotes $\bigcup\{R_k : k < \omega\}$ and S_ω denotes $\bigcup\{S_k : k < \omega\}$. Cases 2 and 4 ensure that $R \subseteq R_\omega$ and $S \subseteq S_\omega$. Further in parenthetical remarks at the end of the various subcases we explained why $R_{k+1} \subseteq R$ and $S_{k+1} \subseteq S$. Finally, it is easy to check that the rules of association are true after step $k + 1$. This completes the proof. □

References

[1] Yu.L. Ershov, *Theory of numberings.*—Nauka, Moscow, 1977 (in russian).

[2] A.Visser *Numerations - calculus and arithmetic.* / In : To H.B. Curry: Essays on combinatory logic, lambda calculus and formalisn (J.P.Seldin, J.R. Hindley.) - Academic Press, New York - 1980. - p.259-284.

[3] Bernardi C., Sorbi A. *Classfying positive equivalence relations.* //J. Symbolic Logic. - 1983, 48.- p.529-537.

[4] A.H. Lachlan *A note on positive equivalence relations*// Zeitschr.f.math. Logic und Grundlagen d.Math., Bd. 33, p.43-46 (1987).

Spectrum of minimal numberings for the families of arithmetical sets[1]

Serikzhan Badaev
al-Farabi Kazakh National University, Almaty

Abstract

We give complete description of minimal arithmetical numberings spectrums for the families of arithmetical sets.

1 Preliminaries

We refer to [1–3] for the basic notions of the theory of algorithms and the theory of numberings.

Let us remind necessary definitions. A numbering α of a family $\mathcal{A}$ of c.e. sets is called *computable* if the binary relation $x \in \alpha y$ is c.e. In paper [4] of S. Goncharov and A. Sorbi, the notion of computable numbering was generalized towards the families of arithmetical sets as follows. A numbering α of a family $\mathcal{A} \subseteq \Sigma^0_{n+1}$ is called $\Sigma^0_{n+1}-$*computable* if the binary relation $x \in \alpha y$ is $\Sigma^0_{n+1}-$predicate. If $n = 0$ then $\mathcal{A}$ consists of c.e. sets and Σ^0_1-computability of α coincides with the classical computability of α.

A numbering α is called *reducible* to a numbering β (symbolically, $\alpha \leqslant \beta$) if $\alpha = \beta \circ f$ for some computable function f. The two numberings are called *equivalent* if they are reducible each to other. In what follows, "number of numberings" of some type is considered up to the equivalence relation of numberings.

Usually, generalized computable numberings are considered with respect to the classical reducibility. We also use a reducibility via $\mathbf{0}^{(i)}-$computable functions with $i > 0$ to construct $\Sigma^0_{n+2}-$computable numberings.

[1]Partially supported by grant INTAS-RFBR-97-139

Proposition 1. *For every n and every $i \leq n$, if a numbering α is Σ^0_{n+1}–computable and $\beta = \alpha \circ f$ for some $\mathbf{0}^{(i)}$–computable function f then the numbering β is Σ^0_{n+1}–computable too.*

Proof. Really, for all $x, y \in \omega$,

$$y \in \beta x \Longleftrightarrow \exists z(z = f(x) \ \& \ y \in \alpha z)$$

and therefore $y \in \beta x$ is Σ^0_{n+1}–relation.

A numbering α of a family $\mathcal{A}$ is called *minimal* if for every numbering β of the same family, $\beta \leqslant \alpha$ implies $\alpha \leqslant \beta$. A numbering α of an infinite family $\mathcal{A}$ is called *Friedberg numbering* if each set of $\mathcal{A}$ has exactly one α–index. Let θ_α stands for the equivalence $\{(n, m) \mid \alpha n = \alpha m\}$. A numbering α is called *positive numbering (decidable numbering)* if $\theta_\alpha \in \Sigma^0_1$ (respectively, $\theta_\alpha \in \Delta^0_1$). Each decidable numbering of an infinite family is equivalent to some Friedberg one [5]; both Friedberg and positive numberings are minimal [6]. The class of computable decidable numberings is a proper subclass of the class of computable positive numberings and the latter is a proper subclass of the class of computable minimal numberings [1].

At the end of 60-th Yu.L. Ershov formulated the problem of finding a possible number of computable minimal numberings for a given family of c.e. sets. The problem of Ershov is still open, we refer to [7,8] for the further information on that problem.

Our aim is to describe a possible number of Σ^0_{n+2}–computable minimal numberings of each type for any given family of Σ^0_{n+2}–sets, $n \in \omega$.

It is well known that every finite family has the least numbering under reducibility and that the least numbering is decidable [1]. Due to this, we can consider only infinite families of arithmetical sets.

2 Number of Friedberg numberings.

Friedberg numberings were introduced versus to Gödel numberings. In [9], R. Friedberg proved that the family of all unary partial computable functions and the family of all c.e. subsets of ω have such numberings. Friedberg numberings were studied by many famous specialists in the computability theory: A.Lachlan, M.B. Pour-El, H. Putnam, A.I. Mal'tsev, Yu.L. Ershov, S.S. Marchenkov, A.B. Khutoresky, M. Kumer and others. Besides the problem of finding conditions for a family to have Friedberg numberings, they studied the question on number of Friedberg numberings

for various families of c.e. sets. For a long time, it were known only the families with either 0 or 1 or ω computable Friedberg numberings. At the beginning of 80-th S.S. Goncharov [10] established close connection between number of computable Friedberg numberings of the families of c.e. sets and algorithmic dimension of computable models. Well-known Goncharov's theorem shows an existence of the families of c.e. sets with exactly 2, exactly 3, and so on computable Friedberg numberings [11].

Thus, the set $\{0, 1, 2, \ldots, \omega\}$ completely describes all possible numbers of computable Friedberg numberings in the classical case of the families of c.e. sets. Naturally, the problem on number of $\Sigma^0_{n+2}-$computable Friedberg numberings of the families of $\Sigma^0_{n+2}-$sets arises for an arbitrary n.

First of all, let us consider a question on an existence of infinite sets without Friedberg numberings.

Proposition 2. *For every n, there exist infinite Σ^0_{n+1} –computable families of $\Sigma^0_{n+1}-$sets without $\Sigma^0_{n+1}-$computable Friedberg numberings.*

Proof. Let n be an arbitrary number and let A be a set of the class $\Sigma^0_{n+1} \setminus \Pi^0_{n+1}$. For every $x \in \omega$, let

$$\alpha x = \begin{cases} \{x\} & \text{if} \quad x \in \overline{A}, \\ A & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then α is numbering of the family $\mathcal{A} \leftrightharpoons \{\alpha x \mid x \in \omega\}$. Since for all x, y,

$$y \in \alpha x \Longleftrightarrow x = y \vee y \in A \,\&\, x \in A,$$

it follows that α is $\Sigma^0_{n+1}-$computable numbering.

If we would assume that $\mathcal{A}$ has a $\Sigma^0_{n+1}-$computable Friedberg numbering β with $\beta 0 = A$ then we obtain

$$y \in \bigcup_{x>0} \beta x \Longleftrightarrow \exists x (x > 0 \,\&\, y \in \beta x)$$

and, therefore, $\overline{A} = \bigcup_{x>0} \beta x$ is $\Sigma^0_{n+1}-$set. Contradiction.

□

An existence of the families of $\Sigma^0_{n+2}-$sets which have infinite number of $\Sigma^0_{n+2}-$computable Friedberg numberings follows easily from the known facts of the theory of numberings. Let $\mathcal{A}$ be any computable family of c.e. sets which has infinitely many computable Friedberg numberings, for instance, let $\mathcal{A}$ be the family of all c.e. subsets of ω [12]. Obviously, such numberings are $\Sigma^0_{n+2}-$computable Friedberg numberings of $\mathcal{A}$ for all n too.

We obtained now that both 0 and ω can be realized as the number of Σ^0_{n+2}–computable Friedberg numberings of some family. Our goal is to prove that there is no other possibilities for the desired number.

By proposition 1, if $\alpha : \omega \longrightarrow \mathcal{A}$ is a Σ^0_{n+2}–computable Friedberg numbering and f is a $\mathbf{0}'$–computable permutation of ω then $\beta = \alpha \circ f$ is Σ^0_{n+2}–computable numbering of $\mathcal{A}$. Obviously, β is Friedberg numbering. Note that if f is not computable then β is not reducible to α.

Let f^k stands for k–th iteration of permutation f: $f^{(0)}(x) = x$, $f^{(k+1)}(x) = f(f^{(k)}(x))$, $x \in \omega$.

Proposition 3. *There exists $\mathbf{0}'$–computable permutation p such that $p^{(k)}$ is not computable for all $k > 0$.*

Proof. Let A be any infinite set and $0 \in A$, and let $A = \{g(0) < g(1) < g(2) \dots\}$. Define function h as follows: $h(0) = g(0)$, $h(n+1) = h(n) + 2g(n+1), n \in \omega$. For every n, let $p(h(n+1) - 1) = h(n)$ and let $p(i) = i + 1$ for every i such that $h(n) \leqslant i < h(n+1) - 1$.

It is easy to check that the following five statements are equivalent:

(i) A is computable set,

(ii) g is computable function,

(iii) h is computable function,

(iv) $p^{(k)}$ is computable permutation for all $k \in \omega$,

(v) $p^{(k)}$ is computable permutation for some $k > 0$.

Now, by letting A be the complement of any non-computable c.e. set we obtain $\mathbf{0}'$–computable permutation p satisfying the statement of proposition 3.

Corollary. *If a family $\mathcal{A} \subseteq \Sigma^0_{n+2}$ has at least one Σ^0_{n+2}–computable Friedberg numbering then $\mathcal{A}$ has infinite number of such numberings.*

Proof. Let α be a Σ^0_{n+2}–computable Friedberg numbering of $\mathcal{A}$. Let permutation p satisfy conclusion of proposition 3. The numberings $\alpha \circ p^{(k)}, k \in \omega$, are pairwise non-equivalent, and each of them is Σ^0_{n+2}–computable Friedberg numbering of $\mathcal{A}$.

Thus, for every n and for every infinite family of Σ^0_{n+2}–sets, the number of Σ^0_{n+2}–computable Friedberg numberings is either 0 or ω.

Theorem 1. *For every n, a family $\mathcal{A} \subseteq \Sigma^0_{n+1}$ has Σ^0_{n+1}–computable Friedberg numbering if and only if for some Σ^0_{n+1}–computable numbering α of $\mathcal{A}$, the set*

$$F_\alpha \leftrightharpoons \{x \mid (\forall y < x)(\alpha y \neq \alpha x)\} \text{ is } \mathbf{0}^{(n)}$$

computably enumerable.

Proof. *Necessity* is evident since if $\mathcal{A}$ has Σ^0_{n+1}–computable Friedberg numbering α then $F_\alpha = \omega$.

Sufficiency. Let F_α be $\mathbf{0}^{(n)}$–computably enumerable set for some Σ^0_{n+1}–computable numbering α of $\mathcal{A}$. Let f be any injective $\mathbf{0}^{(n)}$–computable function with $\mathrm{rng}(f) = F_\alpha$. Define numbering β of $\mathcal{A}$ as $\beta = \alpha \circ f$. Proposition 1 implies that β is Σ^0_{n+1}–computable Friedberg numbering.

□

Remark 1. Theorem 1 gives also a criterion for infinite Σ^0_{n+2}–computable family $\mathcal{A}$ to have Σ^0_{n+2}–computable positive numbering. This follows immediately from a fact of S.S. Goncharov and A. Sorbi [4]. They had shown that if an infinite family of Σ^0_{n+2}–sets has Σ^0_{n+2}–computable positive numbering then it has Σ^0_{n+2}–computable Friedberg numbering.

3 Number of positive numberings.

Likewise to Friedberg numberings, positive numberings were also studied by many authors (A.I. Mal'tsev, Yu.L. Ershov, S.S. Goncharov, V.V. V'jugin, S.A. Badaev, S.S. Marchenkov, A.B. Khutoresky, V.L. Selivanov and others). There are known a lot of structural conditions for a family of c.e. sets to have computable positive numberings (see [1], [7] for references).

Note that "identifying" the sets is a typical tool to construct computable positive numberings. For illustration the identifying procedure, lets us consider the family of all singletons and let $\alpha n \leftrightharpoons \{n\}, n \in \omega$, and choose a non-computable c.e. set A. It we "identify" all the sets with α–indices from A then we obtain computable positive numbering

$$\beta n = \begin{cases} \alpha n & \text{if} \quad n \in \overline{A}, \\ A & \text{otherwise} \end{cases}$$

of the family $\{\beta n \mid n \in \omega\}$ without computable Friedberg numberings.

Note that the identifying procedure is often used also to construct non-positive numberings too. Indeed, we used it in the proof of proposition 2.

It seems, that an existence of computable positive numberings is not strongly connected with the structural properties of the families. There is no any structural conditions both necessary and sufficient for the families of c.e. sets to have computable positive numberings. Due to this, S.A. Badaev [13] suggested some computational approach to find criterion of positive computability. Essentially, this criterion describes conditions under which the sets of a family could be identified. Besides, it could be easily generalized to the case of the families of arithmetical sets.

Theorem 2. *For every n, a family $\mathcal{A} \subseteq \Sigma^0_{n+1}$ has Σ^0_{n+1}–computable positive numbering if and only if for some Σ^0_{n+1}–computable numbering α of $\mathcal{A}$, equivalence θ_α is $\mathbf{0}^{(n+1)}$–computable.*

Proof is direct relativization of the proof given in [13] for the classical case $n = 0$.

Remark 2. It does not seem realistic to search for the structural conditions of existence of Σ^0_{n+2}–computable positive numberings since proposition 2 gives us an example of the effectively discrete family (see [1] for the notion of effectively discreteness) without any Σ^0_{n+2}–computable positive numberings.

Proposition 4. *It an infinite family has a Σ^0_{n+2}–computable Friedberg numbering then it has infinitely many Σ^0_{n+2}–computable positive but not decidable numberings.*

Proposition 4 as well as theorem 3 below are proved in the joint paper [14] of S.A. Badaev and S.S. Goncharov.

Thus for every infinite family of Σ^0_{n+2}–sets, the number of Σ^0_{n+2}–computable positive but not decidable numberings is either 0 or ω. Remind that in the classical case the set of possible numbers of computable positive numberings is $\{0, 1, 2, \ldots, \omega\}$. Likewise to Friedberg numberings, the most complicated cases of computable families of c.e. sets with $2, 3, 4, \ldots$ computable positive numberings were found by S.S. Goncharov (see [15]).

4 Spectrum of minimal numberings.

Theorem 3[14]. *Every infinite Σ^0_{n+2}–computable family $\mathcal{A} \subseteq \Sigma^0_{n+2}$ has infinite number of Σ^0_{n+2}–computable minimal but not positive numberings.*

Let $\mathcal{A} \subseteq \Sigma^0_{n+2}$ be a Σ^0_{n+2}–computable family of Σ^0_{n+2}–sets. Let
δ be number of Σ^0_n–computable decidable numberings of $\mathcal{A}$;
π be number of Σ^0_n–computable positive but not decidable numberings of

$\mathcal{A}$;
μ be number of Σ^0_n-computable minimal but not positive numberings of $\mathcal{A}$.
The triple $\langle \delta, \pi, \mu \rangle$ is called by *spectrum of minimal numberings* of $\mathcal{A}$.

Theorem 4. *Let $\mathcal{A}$ be $\Sigma^0_{n+2}-$computable family. If $\mathcal{A}$ is finite then the spectrum of minimal numberings of $\mathcal{A}$ is equal to $\langle 1, 0, 0 \rangle$ otherwise the spectrum is equal to either $\langle \omega, \omega, \omega \rangle$ or $\langle 0, 0, \omega \rangle$.*

References

[1] Yu.L. Ershov, *Theory of numberings.*—Nauka, Moscow, 1977 (Russian).

[2] A.I. Mal'tsev, *Algorithms and recursive functions,*—Wolters-Noordoff Publishing, Groningen, 1970.

[3] H. Rogers *Theory of recursive function and effective computability.*—McGraw-Hill Book Company, New York, 1967.

[4] S.S. Goncharov, A. Sorbi, *Generalised computable numerations and non-trival Rogers semilattices.* Algebra and Logic, 1997, vol. 36, n. 4, pp. 359–369.

[5] A.I. Mal'tsev, *Constructible algebras. I,* Uspekhi Mat. Nauk, 1961, v.16, n.3, pp.3–60.

[6] A.I. Mal'tsev, *Positive and negative enumerations.* Soviet Math. Dokl., v.6 (1965), pp. 75–77.

[7] S.A. Badaev, S.S. Goncharov, *On computable minimal enumerations.* Algebra. Proceedings of the Third International Conference on Algebra, Dedicated to the Memory of M.I.Kargopolov. Krasnoyarsk, August 23–28, 1993. – Walter de Gruyter, Berlin – New York, 1995, p.21–32.

[8] S.A. Badaev , S.S. Goncharov, *Theory of numberings: open problems.* In Computability Theory and its Applications, P. Cholak, S. Lempp, M. Lerman and R. Shore eds.—Contemporary Mathematics, American Mathematical Society, 2000, vol. 257, pp. 23-38, Providence

[9] R.F. Fridberg, *Three theorems on recursive function.* J. Symbolic Logic, 1958, v. 23, n. 3, 309–316.

[10] S.S. Goncharov, *On the problem of number of non-self-equivalent constructivizations.* Algebra and Logic, 1980, v.19, n.6, pp.401–414.

[11] S.S. Goncharov, *Computable univalent numberings.* Algebra and Logic, 1980, vol.19, n. 5, pp. 325–356.

[12] A.B. Khutoretsky, *On reducibility of computable numberings.* Algebra and Logic, 1969, vol. 8, n. 2, pp. 251–264.

[13] S.A. Badaev, *On positive enumerations.* Siberian Math. J., v.18, n.3 (1977), 343-352.

[14] S.A. Badaev, S.S. Goncharov, *On Rogers semilattices of families of arithmetical sets.* Algebra and Logic, 2001, v.40, n.5, pp. 283–291.

[15] S.S. Goncharov, *Positive computable enumerations.* Russian Acad. Sci. Dokl. Math., 1994, v.48, n.2, pp.268–270.

On Erdös –Woods Conjecture

Yerzhan Baisalov (yerzhan_baisal@hotmail.com)
al-Farabi Kazakh National University, Almaty

Two sequences of positive integers $a, a+1, ..., a+k$ and $b, b+1, ..., b+k$ are called *Erdös–Woods pair* if for each $0 \leq i \leq k$ the integers $a+i$ and $b+i$ have the same prime factors; in this case we say also that the pair have a *depth* k.

The following is known as Erdös –Woods Conjecture: for some positive integer k there is no any Erdös –Woods pair of depth k.

Woods proved that this purely number-theoretic conjecture is closely related to some questions of the formal arithmetics and its fragments.

I will discuss on this conjecture.

A Computability-Theoretic Learning Theory Sampler

John Case (case@cis.udel.edu)
University of Delaware (USA)

This talk is about algorithmic learning (or inference) of programs for computational objects — from data about those objects. It provides a sampler of results in three settings (together with a list of other settings that might have been presented). The three settings:

1. For learning or inferring programs for computable functions, presented are some delicate tradeoffs between the *generality* of an algorithmic learning device and the *quality* of the successful programs it converges to. There are preliminary results to the effect that, with small increases in generality of the learning device, the computational complexity of some successfully learned programs is provably unalterably *sub*optimal. There are also results in which the complexity of successfully learned programs *is* optimal and the learning device is quite general, but some of those optimal, learned programs are provably unalterably information deficient — in fact, deficient as to safe, algorithmic extractability of even the fact that they are approximately optimal. For these results, the safe, algorithmic methods of information extraction will be by proofs in arbitrary, true, computably axiomatizable extensions of Peano Arithmetic.

2. A number of child cognitive development phenomena follow the U-shaped form of: first learning, then *un*learning, and subsequent *re*learning. One can ask if U-shaped learning is an evolutionary accident or essential. For learning grammars (or r.e. indices) from positive data for r.e. languages, there are classes which are learnable with syntactic convergence in the limit to successful grammars *but not without* U-shaped learning. In this formal setting, W-shaped learning is provably *not* essential.

3. Closed computable games model reactive process-control problems. Closed implies that, if Player I does not lose at any finite point in the playing of the game, Player I does not lose (in the limit). Examples include discrete regulation of room temperature with Player I as thermostat. A *master* of a closed computable game plays an algorithmic winning strategy for Player I. Presented are results about advantages for Player I watching the *behaviors* (not programs) of masters. It can be shown that: selected masters enable learning to win more process-control games than arbitrary masters; for each kind of master, it's better to learn ones own winning strategy instead of trying to copy the master's; and, for each kind of master, one can learn more process control games with $m + 1$ than with m masters. Discussed will be the connection to behavior cloning in applied machine learning.

Machine Learning for a Genomics Analogy Problem

John Case (case@cis.udel.edu)
University of Delaware (USA)

This talk will introduce machine learning in bioinformatics by means of the example of one empirically-based and preliminary study.

Orthologs are genomic strings evolutionarily derived from a common ancestor and having the same biological function. Ortholog detection is biologically interesting since it indirectly informs us about protein divergence through evolution, and, in our particular study, has potentially important agricultural applications.

In our context (to be explained in the talk), we indicate how we arrived at particular (fixed size) attribute vectors to represent genomic string data and show how we conceive ortholog detection as an analogy problem. The attributes are based on both the typical string *similarity* measures from bioinformatics and on a large number of *differential* measures or metrics, many new to bioinformatics. Many of these differential metrics are based on evolutionary considerations, both theoretical and empirically observed, in some cases observed by the authors.

Our study employed Quinlan's machine learning algorithm called C5.0. It 1. fits a sequence of decision trees to known classification data by means of an information-theoretic heuristic, where each tree beyond the first is concentrated on correcting the errors of its predecessor; and 2. employing so-called boosting to make the final classification decisions by weighted majority vote of the trees, where higher voting weights are assigned to trees with fewer errors. We applied C5.0 to sets of known ortholog classification data and tried it out on larger sets of such data.

The results we will report are encouraging for complete cDNA strings, and we describe our hopes for future extensions of this study.

This is joint work with Ming Ouyang and Joan Burnside.

On the Limit Constructible Models[2]

Vyacheslav Dobritsa (dobritsa@mail.ru)
Abai Almaty University (Kazakhstan)

Abstract

We suggest to consider a generalization of the notion of computable model by letting the predicates and the functions of a countable model be computable with respect to zero-prime oracle. We call such models *limit constructible models* and study their autostability as well as generalized autostability (automorphism representable by zero-prime computable functions).

Let $\mathfrak{M} = \langle M; \sigma \rangle$ be an at most countable model of a finite or enumerable signature. If there exists a numbering $\nu : N \to M$ of the universe M of the model $\mathfrak{M}$ such that:

1. $\forall f \in \sigma \; \exists f^* \in \Delta_2^0$:

$$\forall x_1, ..., x_n \in \mathbb{N} \quad \nu(f^*(x_1, ..., x_n)) = f(\nu(x_1), ..., \nu(x_n)),$$

2. $\forall P \in \sigma \; \exists P^* \in \Delta_2^0$:

$$\forall x_1, ..., x_m \in \mathbb{N} \quad P^*(x_1, ..., x_m) \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models P(\nu(x_1), ..., \nu(x_m)),$$

where f is an n-ary function, P is an m-ary predicate, then the model $\mathfrak{M}$ is called l-constructible (limit-constructible).

In this case the numbering ν is called l-constructive (limit-constructive) and the pair $(\mathfrak{M}, \nu)$ is called l-constructive (limit-constructive) model. It is clear that each constructive model, in the sense of A.I.Mal'tsev definition, is l-constructive.

Theorem 1 *There exists an l-constructible, but not constructible algebraic system.*

[2]Partially supported by grant INTAS-00-499

Theorem 2 *The direct product of l-constructible models is an l-constructible model.*

It is natural to consider the limit-reducibility of l-constructive enumerations for l-constructive algebraic systems, which had been introduced by S.S. Goncharov for constructive enumerations of models. Let $(\mathfrak{M}, \mu)$ and $(\mathfrak{M}, \nu)$ be l-constructive models. We say that the l-constructive numbering ν is l-reducible (limit-reducible) to the numbering μ, if there exists an isomorphism $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ and the Δ_2^0-function $h(x)$ such that the equality $\varphi(\nu(x)) = \mu(h(x))$ holds. We denote the limit-reducibility by $\leq_2$.

Two l-constructive numberings μ and ν of the same model are called l-equivalent if they are limit-reducible to each other. It is denoted by $\equiv_2$. Model $\mathfrak{M}$ is called l-stable (limit-stable) if all its l-constructive numberings are pairwise l-equivalent.

Theorem 3 *There exists a limit-constructible, but not limit-stable model.*

Theorem 4 *There exists a limit-stable, but not autostable constructive model.*

Denote by $\nu^{-1}(\mathfrak{M}_0)$ the set of all ν-numbers of elements of submodel $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{M}$, where ν is an l-constructive numbering of model $\mathfrak{M}$.

Theorem 5 *If $\mathfrak{M}_0$ is a submodel of model $\mathfrak{M}$, ν is a limit-constructive numbering of $\mathfrak{M}$ and the set $\nu^{-1}(\mathfrak{M}_0) \in \Delta_2^0$, then $\mathfrak{M}_0$ is a limit-constructible model.*

References

1. H. Rogers, *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, McGraw Hill, 1967.

2. A.I. Mal'tsev, *Constructive Algebras I*, Usp.Mat.Nauk, v. 16, 3, 1961, pp. 3 – 60 (Russian).

3. S.S. Goncharov, *The Limit-Equivalent Constructivizations*, in Mathematical Logics and Theory of Algorithms. Proc. of Inst.of Math. SO AN SSSR, v.2, Novosibirsk, 1982, pp. 4 – 12 (Russian).

4. S.S. Goncharov, Yu.L. Ershov, *Constructive Models*, Siberian School of Algebra and Logic, Novosibirsk, 1999.

On Degrees of Uncountably Categorical Theories with Computable Models

Ekaterina Fokina (e_fokina@ngs.ru)
Novosibirsk State University (Russia)

One of the themes of computable model theory is concerned with the following two questions. Let T be a first order consistent theory. Does there exist a computable model of T? If T has a computable model then what is the Turing degree of T? It's well known that if T is decidable then T has a decidable model. On the other hand, if theory T has a computable model then T is computable in $\mathbf{0}^{\omega}$. Goncharov and Khoussainov proved that for any natural number $n \geq 1$, there exist $\aleph_1$-categorical computable models with the theories Turing equivalent to $\mathbf{0}^n$. We use a modified construction to obtain the following result.

Any arithmetical Turing degree can be realized as the computability-theoretic complexity of $\aleph_1$-categorical theory with computable model.

Computability and autostability

Sergey Goncharov (gonchar@math.nsc.ru)
Novosibirsk State University (Russia)

We intend to talk about the autostability problem of computable models and definable relations on computable models. The classification problem of computable models has deep interrelations with the problem of complexity of definable relations. This approach is closely connected with a choice of a language in which a suitable description of computable numberings is considered. We will also discuss some open questions on complexity of the theories with recursive models.

The jump operator is definable in the enumeration degrees

Iskander Kalimullin (Iskander.Kalimullin@ksu.ru)
University of Kazan (Russia)

We show that the jump operator in the enumeration degrees is order-theoretic definable in the enumeration degrees. This solves a question posed by S. B. Cooper.

Namely, for all e-degrees u and x the following is equivalent: 1) $x \geq u'$, 2) $x \geq u$ and for all e-degrees $a > u$, $b > u$ and $c > u$ if each of pairs (a, b) and (a, c) is u-e-ideal, then $b \cup x = c \cup x$.

(We say that a pair of e-degrees (a, b) is u-e-ideal iff every e-degreel $z \geq u$ is the greatest lower bound of e-degrees $a \cup z$ and $b \cup z$.)

Thus, the class of e-degrees above u' is definable by an AEA-formula (in the language of ordering).

Furthermore, we show that for all e-degrees u and x the following is equivalent: 1) $x \leq u'$ 2) there exists a triple of e-degrees $a > u$, $b > u$ and $c > u$, such that each of pairs (a, b), (a, c), (b, c) is u-e-ideal, and $x \leq a \cup b \cup c$.

Thus, the class of e-degrees below u' is definable by an EAE-formula (in the language of ordering).

Hence, the map $u \longrightarrow u'$ is definable in the e-degrees by a formula which is a conjunction of an AEA-formula and an EAE-formula. Also, by Friedberg Completeness Criterion we can define the class of all total e-degrees above 0' as the image of the jump operator.

Isomorphism problems

Julia Knight (Julia.F.Knight.1@nd.edu)
University of Notre Dame (USA)

Let K be a class of structures closed under isomorphism. In a meeting in Kazan in 1997, Goncharov gave a talk on computable structure theory. He stated a large number of problems calling for the classification of computable members of various classes. At the end of the talk, Shore asked what would convince Goncharov to give up. In model theory, there are "many models" theorems. In descriptive set theory, there are Borel completeness theorems. Goncharov and I considered different approaches to classification and non-classification for computable structures, eventually settling on one as most productive.

Let $I(K)$ be the set of computable indices for members of K. Let $E(K)$ be the set of pairs (a, b) such that $a, b \in I(K)$, and the structures with indices a and b are isomorphic. Assuming that $I(K)$ is Δ^1_1, $E(K)$ is always Σ^1_1. If $E(K)$ is not Δ^1_1, then there cannot be simple invariants distinguishing among computable members of K. (It follows that there is no computable bound on Scott ranks of computable members of K, and there is no hyperarithmetical Friedberg enumeration of computable members of K, up to isomorphism.)

It is well-known that if K is the class of linear orderings, Boolean algebras, or Abelian p-groups, then $E(K)$ is Σ^1_1 complete. (Proofs may be extracted from a 1989 paper of Friedman and Stanley, but the results may be older.) Calvert has shown that for the class K of undirected graphs, fields of a fixed characteristic, or real-closed fields, $E(K)$ is Σ^1_1 complete. For the class K of vector spaces over a fixed infinite computable field, or algebraically closed fields of a fixed characteristic, $E(K)$ is Π^0_3 complete.

On some properties of $\aleph_0$-categorical weakly o-minimal structures

Beibut Kulpeshov

Abstract

We prove some properties of $\aleph_0$-categorical weakly o-minimal structures. First we present a criterion for goodness of each self-definable subset of an $\aleph_0$-categorical weakly o-minimal structure of convexity rank 1 (Theorem 13). Further we give a description of all $\aleph_0$-categorical binary weakly o-minimal theories of convexity rank 1 which generalizes A. Pillay and Ch. Steinhorn result for $\aleph_0$-categorical o-minimal theories [1] (Theorem 16). Lastly, at the end of the paper we present a criterion for holding the Exchange Principle for algebraic closure in an $\aleph_0$-categorical binary weakly o-minimal theory (Theorem 19).

Let L be a countable first-order language. Everywhere in this paper we consider L-structures and assume that L contains a binary relation symbol $<$ that is interpreted as a linear ordering in these structures. For arbitrary subsets A, B of a structure M we write $A < B$ if $a < b$ whenever $a \in A$ and $b \in B$. If $A \subset M$ and $x \in M$ then we write $A < x$ if $A < \{x\}$. For any subset A of a structure M $\quad A^+ := \{b \in M | A < b\}$ and $A^- := \{b \in M | b < A\}$. For an arbitrary complete type p we denote by $p(M)$ the set of realizations of the type p in M.

An *open interval* I in a structure M is a parametrically definable subset of M of the form $I = \{c \in M : M \models a < c < b\}$ for some $a, b \in M \cup \{-\infty, \infty\}$ with $a < b$. Similarly, we may define *closed, half open-half closed*, etc., intervals in M, so that for instance a point of M is itself a (trivial) closed interval. A subset A of M is *convex* if $a < c < b \wedge a, b \in A \Rightarrow c \in A$. Thus, a set is convex if it is an interval whose endpoints are now allowed to lie in the order-completion $\overline{M}$ of M.

This paper concerns the notion of *weak o-minimality* first introduced by

M. Dickmann in [2]. *A weakly o-minimal structure* is linearly ordered structure $M = \langle M, =, <, \dots \rangle$ such that any definable (with parameters) subset of M is a finite union of convex sets in M. Recall that such a structure M is said to be *o-minimal* if every definable (with parameters) subset of M is a finite union of intervals in M. Thus, weak o-minimality is a generalization of o-minimality. A. Pillay and Ch. Steinhorn have described all $\aleph_0$–categorical o-minimal theories [1]. $\aleph_0$–categorical weakly o-minimal theories were investigated independently in [3] by using the notions of ultrametric and C-relation. Here we investigate $\aleph_0$–categorical weakly o-minimal theories by using Baizhanov's technique which he has elaborated for classification of one-types in weakly o-minimal theories [4], [5].

Definition 1 Let M be a linearly ordered structure, $A, B \subseteq M$, $n \in \omega$.

1. We will say A is *n-indiscernible over B* in M if for any properly ordered n–tuples $\bar{a}$, $\bar{b} \in A^n$ $tp(\bar{a}/B) = tp(\bar{b}/B)$.

2. We will say A is *indiscernible over B* in M if for any $n \in \omega$ A is n–indiscernible over B in M.

In the following definitions M is a weakly o-minimal structure, A, $B \subseteq M$, M is $|A|^+$-saturated, $p, q \in S_1(A)$ are non-algebraic.

Definition 2 [5] We will say p is *non-solitary* if there are an A-definable formula $H(x, y)$ and $\alpha, \gamma_1, \gamma_2 \in p(M)$ such that $H(M, \alpha) \neq \emptyset$ and $\gamma_1 < H(M, \alpha) < \gamma_2$.

Convexity rank of a formula with one free variable was introduced in [6]. In particular, a theory has convexity rank 1 if there is no definable (with parameters) equivalence relation with infinitely many convex infinite classes. It is obvious an o-minimal theory has convexity rank 1.

Theorem 3 *[7] Let T be an $\aleph_0$–categorical weakly o-minimal theory. Then the following conditions are equivalent:*

(1) T has convexity rank 1.

(2) For any $M \models T$ for any $A \subseteq M$ every non-algebraic type $p \in S_1(A)$ is solitary.

(3) For any $M \models T$ for any $A \subseteq M$ for any non-algebraic type $p \in S_1(A)$ $p(M)$ is indiscernible over A.

Corollary 4 *Let T be an $\aleph_0$–categorical o-minimal theory. Then for any $M \models T$ for any $A \subseteq M$ for any non-algebraic type $p \in S_1(A)$ $p(M)$ is indiscernible over A.*

Definition 5 [5] Let M be $|A \cup B|^+$–saturated. By a *neighbourhood* of B in the type p we shall call the following set:

$$V_p(B) := \{\gamma \in M \mid \text{there is a formula } H(x, \bar{b}, \bar{a}), \bar{b} \in B, \bar{a} \in A,$$

$$\text{so that } \gamma \in H(M, \bar{b}, \bar{a}) \text{ and there are } \gamma_1, \gamma_2 \in p(M) \text{ such that}$$

$$\gamma_1 < H(M, \bar{b}, \bar{a}) < \gamma_2\}.$$

Definition 6 [5] Let M be $|A|^+$–saturated. We will say p is *almost orthogonal* to q ($p -^a q$) if there is $\alpha \in p(M)$ such that $V_p(\alpha) = \emptyset$.

Definition 7 [5] Let M be $|A|^+$–saturated. We will say p is *weakly orthogonal* to q ($p -^w q$) if for any A–definable formula $H(x, y)$ for any $\alpha \in p(M)$ the following holds:

$$[\, H(M, \alpha) \cap q(M) \neq \emptyset \;\Rightarrow\; q(M) \subseteq H(M, \alpha) \,]$$

Definition 8 [5] We will say a weakly o-minimal theory T is *almost o-minimal* if for any $M \models T$ for any $A \subseteq M$ for any non-algebraic types $p, q \in S_1(A)$ the following holds:

$$p -^a q \;\Leftrightarrow\; p -^w q.$$

Fact 9 *Any o-minimal theory is almost o-minimal.*

Earlier we had proved a theorem which describes all $\aleph_0$–categorical almost o-minimal theories of convexity rank 1:

Theorem 10 *[8] Let T be an $\aleph_0$–categorical almost o-minimal theory of convexity rank 1, $M \models T$, $|M| = \aleph_0$. Then there exist*
(i) a finite $C = \{c_0, \ldots, c_n\} \subseteq M$ ($M \cup \{-\infty, +\infty\}$, if M does not have a first or last element), consisting of all of the $\emptyset$–definable elements in M (with the possible exceptions of $-\infty, +\infty$), such that $M \models c_i < c_j$ for all $i < j \leq n$ and for each $j \in \{1, \ldots, n\}$ either $M \models \neg(\exists x) c_{j-1} < x < c_j$ or $I_j = \{\, x \in M : M \models c_{j-1} < x < c_j \,\}$ is a dense linear order without endpoints and there are $k_j \in \omega$ and $p^j_1, \ldots, p^j_{k_j} \in S_1(\emptyset)$ so that

$I_j = \bigcup_{s=1}^{k_j} p_s^j(M)$;
(ii) an equivalence relation $E \subseteq (\{s : 1 \leq s \leq k\})^2$, *where* $\{p_s \mid s \leq k < \omega\}$ *is an arbitrary enumeration of all non-algebraic 1-types over* $\emptyset$, *such that for each* $(i,j) \in E$ *there is a unique* $\emptyset$*–definable monotone bijection* $f_{i,j} : p_i(M) \to p_j(M)$ *so that* $f_{i,i} = id_{p_i(M)}$ *and* $f_{j,k} \circ f_{i,j} = f_{i,k}$ *for all* (i,j), $(j,k) \in E$,
so that T *admits elimination of quantifiers down to the language*

$$\{=, <\} \cup \{\underline{c}_i : i \leq n\} \cup \{\underline{U}_s : s \leq k\} \cup \{\underline{f}_{i,j} : (i,j) \in E\},$$

where the $\underline{c}_i$ *are interpreted in* M *by* c_i, $\underline{U}_s$ *by* $p_s(M)$, $\underline{f}_{i,j}$ *by* $f_{i,j}$ *for* $(i,j) \in E$. *In particular,* T *is binary.*
Moreover to any ordering with distinguished elements as in (i) and any suitable equivalence relation E *as in (ii), there corresponds an* $\aleph_0$*–categorical almost o-minimal theory of convexity rank 1 as above.*

From the theorem follows that almost o-minimal theories of convexity rank 1 essentially don't differ from o-minimal theories in the $\aleph_0$–categorical context, i.e. are "almost" o-minimal.

Definition 11 [9] Let $A \subseteq M$ where M is an arbitrary first-order structure. We say that A is *self-definable* if A is definable in M with parameters which are elements of A.

Definition 12 [9] Let M be an $\aleph_0$-categorical structure. We call a self-definable subset A of M *good* if for each $n < \omega$ every n-type over A realized in M is isolated.

Now we present a criterion for goodness of each self-definable subset of an $\aleph_0$-categorical weakly o-minimal theory of convexity rank 1:

Theorem 13 *Let* T *be an* $\aleph_0$*-categorical weakly o-minimal theory of convexity rank 1. Then the following conditions are equivalent:*

(1) T *is almost o-minimal*

(2) For any model M *of* T *each self-definable subset* $A \subseteq M$ *is good.*

Proof of Theorem 13.
(1) $\Rightarrow$ (2). It follows by Theorem 10.
(2) $\Rightarrow$ (1). Suppose that T is not almost o-minimal. Then there are a finite set $A \subseteq M$ and non-algebraic 1-types $p_1, p_2 \in S_1(A)$ such that $p_1 \neq^w p_2$,

$p_1 -^a p_2$. Let $A_1 := dcl(A) \cup p_1(M)$. It is obvious that A_1 is self-definable. Consider an arbitrary element $b \in p_2(M)$. It can understand that $tp(b/A_1)$ is not isolated.

□

Corollary 14 *Let T be $\aleph_0$-categorical o-minimal theory. Then for any model M of T each self-definable subset $A \subseteq M$ is good.*

Observe that in Theorem 13 the hypothesis "a theory has convexity rank 1" is essential. Indeed, consider the following example:

Example 15 Let $M = \langle M, =, <, U_1^1, U_2^1, E^2, R^2 \rangle$ where $\langle M, < \rangle$ has an order type Q. The universe M is the disjoint union of U_1 and U_2 with $a < b$ whenever $a \in U_1$, $b \in U_2$, and each predicate U_i hasn't endpoints in M. E is an equivalence relation which partitions $U_1(M)$ on infinite convex classes so that the induced order on E-classes is a dense order without endpoints. To define R, identify U_i with Q for each $i \leq 2$, and for any $a \in U_1$ and $b \in U_2$ we have $R(a,b) \Leftrightarrow b < a + \sqrt{2}$.

It is obvious that $Th(M)$ admits elimination of quantifies. It can prove that $Th(M)$ is an $\aleph_0$-categorical almost o-minimal theory of convexity rank 2. Let $A := U_1(M)$. It is obvious that A is self-definable. Consider an arbitrary element $b \in U_2(M)$. It can understand that $tp(b/A)$ is not isolated.
Observe that $\aleph_0$-categorical binary weakly o-minimal theories of convexity rank 1 aren't almost o-minimal in general. Nevertheless we can describe these theories. The following theorem completely characterizes $\aleph_0$–categorical weakly o-minimal theories of convexity rank 1 that are binary.

Theorem 16 *Let T be an $\aleph_0$–categorical binary weakly o-minimal theory of convexity rank 1, $M \models T$, $|M| = \aleph_0$. Then there exist*
(i) a finite $C = \{c_0, \ldots, c_n\} \subseteq M$ ($M \cup \{-\infty, +\infty\}$, if M does not have a first or last element), consisting of all of the $\emptyset$–definable elements in M (with the possible exceptions of $-\infty, +\infty$), such that $M \models c_i < c_j$ for all $i < j \leq n$ and for each $j \in \{1, \ldots, n\}$ either $M \models \neg(\exists x) c_{j-1} < x < c_j$ or $I_j = \{ x \in M : M \models c_{j-1} < x < c_j \}$ is a dense linear order without endpoints and there are $k_j \in \omega$ and $p_1^j, \ldots, p_{k_j}^j \in S_1(\emptyset)$ so that $I_j = \bigcup_{s=1}^{k_j} p_s^j(M)$;
(ii) equivalence relations E_1, $E_2 \subseteq (\{s : 1 \leq s \leq k\})^2$, where $\{p_s \mid s \leq k < \omega\}$ is an arbitrary enumeration of all non-algebraic 1-types over $\emptyset$, such that

- *for each* $(i,j) \in E_1$ *there is a unique* $\emptyset$*–definable monotonic bijection* $f_{i,j} : p_i(M) \to p_j(M)$ *so that* $f_{i,i} = id_{p_i(M)}$ *and* $f_{j,k} \circ f_{i,j} = f_{i,k}$ *for all* (i,j), $(j,k) \in E_1$;

- *for each* $(i,j) \in E_2$ *there is a unique* $\emptyset$*–definable formula* $R_{i,j}(x,y)$ *such that for any* $a \in p_i(M)$ $R_{i,j}(a,M) \subset p_j(M)$, $R_{i,j}(a,M)^- = p_j(M)^-$, $R_{i,j}(a,M)$ *is convex and open and* $g_{i,j}(x) := sup\ R_{i,j}(x,M)$ *is strictly monotonic on* $p_i(M)$

- *for each* $(i,j) \in E_1$ *we have* $(i,j) \in E_2$ *and* $R_{i,j}(x,y) \equiv y < f_{i,j}(x)$

so that T *admits elimination of quantifiers down to the language* $\{=,<\} \bigcup \{\underline{c}_i : i \leq n\} \bigcup \{\underline{U}_s : s \leq k\} \bigcup \{\underline{f}_{i,j} : (i,j) \in E_1\} \bigcup \{\underline{R}_{i,j} : (i,j) \in E_2 \setminus E_1\}$, *where the* $\underline{c}_i$ *are interpreted in* M *by* c_i, $\underline{U}_s$ *by* $p_s(M)$, $\underline{f}_{i,j}$ *by* $f_{i,j}$ *for* $(i,j) \in E_1$, $\underline{R}_{i,j}$ *by* $R_{i,j}$ *for* $(i,j) \in E_2 \setminus E_1$.
Moreover to any ordering with distinguished elements as in (i) and any suitable equivalence relations E_1, E_2 *as in (ii), there corresponds an* $\aleph_0$*–categorical binary weakly o-minimal theory of convexity rank 1 as above.*

Definition 17 Let M be a linearly ordered structure, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$. *Convexity rank of 1-type* p is infimum of the set $\{RC(\phi(x)|\phi(x) \in p\}$ and it is denoted by $RC(p)$, i.e.

$$RC(p) := \inf\{RC(\phi(x)|\phi(x) \in p\}$$

The Exchange Principle for algebraic closure holds in o-minimal case [1]. However it fails for weakly o-minimal case in general:

Example 18 [10] Let M be a structure $\langle M, <, P^1, f^1\rangle$. Here P is a unary predicate and f is a unary function with $Dom(f) = \neg P, Ran(f) = P$ (so, formally, M is 2-sorted). The universe M is the disjoint union of P and $\neg P$, with $x < y$ whenever $x \in P$ and $y \in \neg P$. To define f, identify P with Q (where Q is the ordering of the rational numbers) and $\neg P$ with $Q \times Q$ (ordered lexicographically), and for any $m, n \in Q$ let $f(m,n) = n$.

It is obvious that M is an $\aleph_0$-categorical binary weakly o-minimal structure and the Exchange Principle for algebraic closure does not hold. Let $p(x) := \{\neg P\}, q(x) := \{P\}$. It is obvious that $p, q \in S_1(\emptyset)$, f is $\emptyset$-definable mapping $p(M)$ on $q(M)$, $RC(p) = 2, RC(q) = 1$.

Theorem 19 *Let T be $\aleph_0$-categorical binary weakly o-minimal theory, $M \models T$. Then the following conditions are equivalent:*

(1) The Exchange Principle for algebraic closure holds in M.

(2) For any $p, q \in S_1(\emptyset)$ whenever there is an $\emptyset$-definable mapping $p(M)$ on $q(M)$ we have $RC(p) = RC(q)$.

References

[1] A. Pillay, Ch. Steinhorn, *Definable sets in ordered structures I*, **Transactions of the American Mathematical Society**, 295 (1986), pp. 565–592.

[2] M.A. Dickmann, *Elimination of quantifiers for ordered valuation rings*, **Proceedings of the 3rd Easter Model Theory Conference at Gross Koris**, Berlin, 1985.

[3] B. Herwig, H.D. Macpherson, G. Martin, A. Nurtazin, J.K. Truss, *On $\aleph_0$–categorical weakly o-minimal structures*, **Annals of Pure and Applied Logic**, 101 (2000), pp. 65–93.

[4] B.S. Baizhanov, *"Orthogonality of one-types in weakly o-minimal theories"*, **Algebra and Model Theory II**, (A.G. Pinus and K.N. Ponomaryov, editors), Novosibirsk State Technical University, 1999, pp. 3–28.

[5] B.S. Baizhanov, *Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates*, **The Journal of Symbolic Logic**, 66 (2001), pp. 1382–1414.

[6] B.Sh. Kulpeshov, *Weakly o-minimal structures and some of their properties*, **The Journal of Symbolic Logic**, 63 (1998), pp. 1511–1528.

[7] B.Sh. Kulpeshov, *Some properties of $\aleph_0$–categorical weakly o-minimal theories*, **Algebra and Model Theory**, (A.G. Pinus and K.N. Ponomaryov, editors), Novosibirsk, 1997, pp. 78–98.

[8] B.Sh. Kulpeshov, *On $\aleph_0$–categorical almost o-minimal theories of convexity rank 1*, **Proceedings of Informatics and Control Problems Institute**, (M. Aidarkhanov and B. Baizhanov, editors), Almaty, 1998, pp. 67–73.

[9] H.D. Macpherson, Ch. Steinhorn, *On variants of o-minimality*, **Annals of Pure and Applied Logic**, 79 (1996), pp. 165-209.

[10] H.D. Macpherson, D. Marker, Ch. Steinhorn, *Weakly o-minimal structures and real closed fields*, **Transactions of the American Mathematical Society**, 352 (2000), pp. 5435–5483.

On constructible matrix or ordered groups

Vitalii Romankov,[3] (*romankov@math.omsu.omskreg.ru*),
Nazif Khisamiev (*hisamiev@mail.ru*)

Abstract

We study the interrelations between constructivizations of a commutative associative ring K with unit and the matrix groups $GL_n(K)$, $SL_n(K)$ and $UT_n(K)$. We also study constructible ordered groups in the signature of ordered groups.

Introduction.

In [1] A.I. Mal'cev initiated studying of constructible groups with describing of all constructible abelian torsion free groups of rank 1. He posed general problem: "What constructible numerations are admitted by some kinds of abstract groups?". Yu.L. Ershov proved in [2] that every constructivization of a nilpotent torsion free group G can be uniquely extended to its $\mathbf{Q}$-completion $G^{\mathbf{Q}}$. Some other results about constructible groups can be found in the papers [3-6]. The foundation of the theory of constructible models can be found in the monographs [7] by Yu.L. Ershov, and in [8] by Yu.L. Ershov and S.S. Goncharov. About facts in the group theory see [9].

We are studying the relations between constructivizations of a commutative associative ring K with unit and the matrix groups $GL_n(K), SL_n(K)$ и $UT_n(K)$. Also we are studying constructible ordered groups in the signature of ordered groups.

[3]Supported by RFFI, grant 01.01.00674.

§1 ON CONSTRUCTIBLE MATRIX GROUPS

Let K be a commutative associative ring with unit. As usual $GL_n(K)$ denotes the group of all invertible, (resp. $SL_n(K)$ – special, $UT_n(K)$ – unitriangular) matrix of size n over K.

Let firstly $G = UT_n(K)$. As C_i $(i = 0, 1, ...)$ we denote i-th member of the central series in G : $C_0 = 1$, C_1 is the center of G, C_{i+1} is the preimage in G of the center of G/C_i $(i = 0, 1, ...)$. It is well known (see [9]), that C_i consists of all matrices, that have $n-i-1$ $(i = 1, 2, ..., n-1)$ zero diagonals from the main one. Thus $C_{n-1} = G$.

Proposition 1 *If the group $G = UT_n(K)$ is constructible, then subgroup C_i is computable for every $i = 0, \ldots, n-1$.*

Note that a group $UT_2(K)$ is isomorphic to the additive group of K. It follows that $UT_2(K)$ is constructible iff the additive group of K is constructible. Thus in the general case the constructibility of $UT_2(K)$ does not imply constructibility of K. In [11] N.G. Khisamiev proved that the field of all primitive recursive real numbers is not constructible. The additive group in this case is complete torsion free abelian group. Hence it is constructible.

Theorem 1 *The group $G = UT_n(K)$ $n \geq 3$ over commutative associative ring K with unit is constructible iff the ring K is constructible.*

In the proof we used the well known Mal'cev's relation between groups and rings from [10].

Note 1 *Theorem 1 is true even in the case when K is not commutative.*

Theorem 2 *The group $G = GL_n(K)(SL_n(K))$ over a commutative associative ring K with unit is constructible iff the ring K is constructible.*

§2 ON CONSTRUCTIBLE ORDERED GROUPS

Let $\langle A, \leq \rangle$ be ordered group and $\nu : \omega \to A$ be some numeration. Structure $\langle A \leq, \nu \rangle$ is called orderably constructible if there is an algorithm defining for $n, m, s \in \omega$ either $\nu n \cdot \nu m = \nu s$, $\nu n \leq \nu m$ are true in A, or not. A group A is called constructible ordered group, if it can be equipped with order $\leq$ and numeration ν such that the structure $\langle A, \leq, \nu \rangle$ is constructible.

We study the question: "What groups are constructible ordered?" We prove that the following groups belong to this class: constructible torsion free abelian, finitely generated torsion free nilpotent, free nilpotent, a group $UT_n(K)$ of all unitriangular matrices of size n over constructible ordered associative commutative ring K with unit.

Also, it is established that the quotient G/C of a constructible group G by the center $C = C(G)$ is finitely generated, then the C is computable, and G/C is constructible.

The class of constructible ordered groups scarcely has been studied yet. We have no example of an orderable constructible group which doesn't admit constructible order. Note that Yu.L. Ershov (see [8], page 100) proved that there exists an ordered constructible field that has not any constructivization in which this order is computable.

Theorem 3 *Every constructible abelian torsion free group A is constructible ordered group.*

Proof. By the Dobritsa-Nurtazin's result [4, 5] there exists such constructivization ν of A, that (A, ν) contains a recursive enumerable basis $a_0, a_1, ...$ Then each element $x \in A$ can be uniquely written as $x = (n_0a_0 + ... + n_ka_k)/m$, where $m, n_k \neq 0, n_i \in Z, m \in \omega, (n_0, ..., n_k, m) = 1$. Define $x > 0$, if the first nonzero coefficient $n_i > 0$. It is not hard to check this relation orders the group A, and the system $\langle A, \leq, \nu \rangle$ is ordered constructible group.

Theorem 4 *Let K be ordered constructible associative commutative ring with 1. Then for every $n \in \omega$, $n > 0$, the group $UT_n(K)$ is orderable constructible group.*

Corollary 1 *Every finitely generated torsion free nilpotent group is orderable constructible.*

Corollary 2 *Every free countable nilpotent group is orderable constructible.*

Proposition 2 *Let (G, ν) be a group with numeration, and the quotient G/C of G by the center $C = C(G)$ is finitely generated. Then C is $G_\nu-$recursive.*

Corollary 3 *Let (G, ν) be constructible group, and the quotient G/C is finitely generated. Then the center C is computable in (G, ν), thus the group G/C is constructible.*

References

[1] А.И. Мальцев, *О рекурсивных абелевых группах*, Докл. АН СССР, **146**, № 5 (1962), 1009–1012.

[2] Ю.Л. Ершов, *Существование конструктивизаций*, Докл. АН СССР, **204**, № 5 (1972), 1041–1044.

[3] С.С. Гончаров, *Автоустойчивость модели и абелевых p-групп*, Алгебра и логика, **19**, № 1 (1980), 23–44.

[4] В.П. Добрица, *О конструктивизациях абелевых групп*, Сиб. мат. ж., **22**, № 3 (1983), 208–213.

[5] А.Т. Нуртазин, *Вычислимые классы и алгебраические условия автоустойчивости*, Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук, Новосибирск, 1974.

[6] Н.Г. Хисамиев, *Конструктивные абелевы p-группы*, Докл. АН СССР, **313**, № 6 (1990), 1365–1367.

[7] Ю.Л. Ершов, *Проблемы разрешимости и конструктивные модели*, М., Наука, 1980.

[8] С.С. Гончаров, Ю.Л. Ершов, *Конструктивные модели, серия*: Сибирская школа алгебры и логики, Новосибирск, Научная книга, 1996.

[9] М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков, *Основы теории групп*, 4-е изд., М., Наука, 1996.

[10] А.И. Мальцев, *Об одном соответствии между кольцами и группами*, Избранные труды, т.2, Математическая логика и общая теория алгебраических систем, М., Наука, 1976. 120–129.

[11] Н.Г. Хисамиев. *Неконструктивизируемость некоторых упорядоченных полей вещественных чисел*, Сиб. мат. ж., **28**, N№ 5 (1987), 193–195.

[12] Н.С. Романовский, *Базы тождеств некоторых матричных групп*, Алгебра и логика, **10**, № 4 (1971), 401–406.

Autostability in Admissible Structures

Anna Romina
al-Farabi Kazakh National University, Almaty

Research on the computability for abstract data types has become widespread of late. From this standpoint, the notion of definability in hereditarily finite structures is of particular interest, for all the now known ways of constructing new data are well interpreted in these. Moreover, hereditarily finite superstructures are the least admissible sets over a model.

The groundwork for our reasoning is the $\sum$-definability approach propounded by Yu.L. Ershov. Along its lines, here we study the definability and the autostability of Boolean algebras in hereditarily finite superstructures. Example is constructed for an admissible set in which the atomless Boolean algebra is not autostable.

Definition 1 *Two $\mathbb{A}$ -constructivizations, ν_0 and ν_1, of $\mathfrak{M}$ are said to be equivalent if there exist a $\sum$ -predicate $R(x;y)$ and an automorphism φ of $\mathfrak{M}$ such that* $\nu_0^{-1}(M) \subseteq \delta R \& (\forall (x,y) \in R)(x \in \nu_0^{-1}(M) \leftrightarrow (y \in \nu_1^{-1}(M) \& \nu_0(x) = \varphi(\nu_1(y))))$.

Definition 2 *A model $\mathfrak{M}$ is said to be $\mathbb{A}$ -autostable if its any two $\mathbb{A}$ -constructivizations are equivalent.*

Example 1 *Let Θ be a constructivization of an atomless Boolean algebra (which is an $\mathbb{A}$ -constructivization for any admissible set $\mathbb{A}$; [3]). Let $\mathfrak{B}$ be an abstract atomless Boolean algebra. Then Θ and $id_{\mathfrak{B}}$ are not equivalent in $A = \mathbb{HF}(\mathfrak{B})$.*

We also consider some problems concerning Δ_1^1 -autostability of Δ_1^1 -constructivizable models.

It's easy to prove, that for each constructivizable model $\mathfrak{M}$ the class of constructivizations $\mathfrak{M}$ is Δ_1^1 iff there is a constructive ordinal α such that for each constructivizable model $\mathfrak{N}$ $\mathfrak{M} \equiv^{\alpha} \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$.

References

[1] S. S. Goncharov, *Countable Boolean Algebras and Decidability* [in Russian], Nauch. Kniga, Novosibirsk (1996).

[2] Yu. L. Ershov, *Problems of Decidability and Constructive Models* [in Russian], Nauka, Moscow (1980).

[3] Yu. L. Ershov, *Definability and Computability* [in Russian], Nauch. Kniga, Novosibirsk (1996).

[4] H. Rogers, *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, McGraw-Hill, New York (1967).

[5] C. J. Ash, *Categoricity in hyperarithmetical degrees*, Ann. Pure Appl. Log., 34, No. 1, 1-34 (1987).

[6] J. Barwise, *Admissible Sets and Structures*, Springer, Berlin (1975).

[7] N. A. Kirpotina, *Equivalence in the language of list superstructures*, Vych. Sist., 139, 26-37 (1991).

[8] O. V. Kudinov, *A description of autostable models*, Algebra Logika, 36, No. 1, 26-36 (1997).

Spectrum of the Atomless Elements Ideal

Pavel Semukhin
Novosibirsk State University (Russia)

A notion of the degree spectrum of a relation on a computable structure was first introduced by V.S. Harizanov in [1]. The definition is following: let U be a relation on a computable structure $\mathcal{A}$, then the degree spectrum (or simply the spectrum) of U is the set

$$Spec(U) = \{\deg_T(U') : \exists \text{ computable } \mathcal{A}' \cong \mathcal{A} \text{ with } \mathcal{U}' \text{ the image of } \mathcal{U}\},$$

where $deg_T(U)$ denotes the Turing degree of U.

J.B. Remmel [2] studied the spectrum of a set of atoms of computable Boolean algebra. In particular, he proved that if computable Boolean algebra has a computable presentation with an infinite computable set of atoms, then the spectrum of the set of atoms consists of all c.e. Turing degrees. In this work the following results about the spectrum of atomless ideal were obtained.

Theorem. 1 *Given a computable Boolean algebra $\mathcal{B}$ with a computable non-principal atomless ideal Al. Then there is a sequence of a computable Boolean algebras $\{\mathcal{B}^n\}_{n\in N}$ such that $\mathcal{B}^n \cong \mathcal{B}$ for all n and $Al^i \not\leq_T Al^j$ for all $i \neq j$, where Al^n is the atomless ideal of $\mathcal{B}^n$.*

Theorem. 2 *Given a computable Boolean algebra $\mathcal{B}$ with ch($\mathcal{B}$)=(1,1,0) and with computable set of atoms. If Al is the atomless ideal of $\mathcal{B}$, then $Spec(Al)$ consists of all Turing degrees that contain Π^0_2 sets.*

References

[1] V.S. Harizanov, *Degree spectrum of a recursive relation on a recursive structure*, PhD Thesis, University of Wisconsin, Madison, WI (1987).

[2] J.B. Remmel, *Recursive isomorphism types of recursive Boolean algebras*, J. Symbolic Logic 46 (1981), 572 – 594.

Strong enumeration reducibilities

Boris Solon (solon@icti.ivanovo.su)
Ivanovo University (Russia)

We will call a binary relation $\leq_\alpha$ on the 2^ω by the reducibility of sets if it is reflexive and transitive. If $A \leq_\alpha B \to A \leq_e B$ for any sets A and B then $\leq_\alpha$ is called *enumeration reducibility* and if $A \leq_\alpha B \to A \leq_T B$ then $\leq_\alpha$ is called *decision reducibility*. We will say that $\leq_\alpha$ is stronger than $\leq_\beta$ if $A \leq_\alpha B \to A \leq_\beta B$ for any sets A and B. It is clear that there are at least 2^{2^ω} many such different reducibilities. Naturally we consider such reducibilities which have an intuitive base related with the effective computability. Some reducibilities are enumerable and decidable simultaneously. For example the reducibilities of the truth-table type $\leq_m$, $\leq_c$, $\leq_q$, $\leq_p$, and also corresponding bounded reducibilities $\leq_{bc}$, $\leq_{bq}$, $\leq_{bp}$ are the same.

In the article [1] the digraph of enumeration reducibilities is constructed in which an oriented edge joins more and less strong reducibilities. In addition the new reducibilities $\leq_{fe}$, $\leq_{be}$, $\leq_{btte}$ are located in this Cooper's digraph. We note if $\leq_\alpha, \ldots, \leq_\beta$ is a finite sequence of reducibilities from which at least one is a enumeration reducibility then the relation $\leq_{\alpha\ldots\beta}$ on the 2^ω such that for any A and B

$$A \leq_{\alpha\ldots\beta} B \iff A \leq_\alpha \wedge \cdots \wedge A \leq_\beta B$$

is the enumeration reducibility. In the article [2] 19 new reducibilities are formed by such way.

S.D. Zaharov proposed yet two enumeration reducibilities:

$$A \leq_{npm} B \iff \exists A_1,\ A_2[A_2 - c.e. \wedge A = A_1 \cup A_2 \wedge A_1 \leq_{pm} B]$$

and $\leq_{nm}$ which results as $\leq_{npm}$ by replacement $\leq_{pm}$ on $\leq_m$. In [3] the new enumeration reducibility $\leq_{wpm}$ was introduced which was called weak partial m-reducibility

$$A \leq_{wpm} B \iff (\exists A_1, \ldots, A_k)[A = \cup A_1 \cup \cdots \cup A_k \wedge$$

$\wedge A_1 \leq_{pm} B \wedge \cdots \wedge A_k \leq_{pm} B]$.

Obviously $\leq_{pm}$ is a stronger reducibility than $\leq_{wpm}$, and the converse is not true. Let $\mathbf{D}_{fpm} = \{d_{wpm}(A) : A \subseteq \omega\}$ be a partial ordered set of wpm-degrees.

Theorem 1 $\mathbf{D}_{fpm}$ *is the upper semilattice with the least element* $\mathbf{0}= d_{wpm}(W)$ *where* $W \neq \emptyset$ *is c.e.*

Theorem 2 $\mathbf{D}_{fpm}$ *is not elementary equivalent* $\mathbf{D}_{pm}$.

Theorem 3 *The reducibility* $\leq_{wpm}$ *is located in Cooper's digraph.*

With the help of such "weakening" of pm-reducibility it is possible to attempt to define new reducibilities. More exactly, let $\leq_\alpha$ be a reducibility, we define

$$A \leq_{f\alpha} B \iff (\exists A_1, \ldots, A_k)[A = A_1 \cup \cdots \cup A_k \wedge$$

$$\wedge\ A_1 \leq_\alpha B\ \wedge \cdots \wedge\ A_k \leq_\alpha B].$$

It appears that in the case $\leq_s$ and $\leq_q$ will not be new reducibilities, and $\leq_{wpc}$ is not a reducibility at all.

References

[1] S.B. Cooper, *e-reducibility using bounded information: counting minimal covers*, Z.fur math.Logik und Grundlagen der Math. Bd.33 (1987), 537 – 560

[2] A.N.Degtev, *About intersection of some classes of reducibilities*, Mathematics, the Program "Universities of Russia", MGU, 1994, 303 – 304.

[3] B. Solon, *The weak pm-reducibility*, XI Conf. of Math. Logic, Abstract, Kazan, 1992, 131.

On the Effective Continuity of Effective Multifunctions

Dieter Spreen (spreen@informatik.uni-siegen.de)
University of Siegen (Germany)

Multifunctions have turned out to be an important concept in computable as well as computational analysis. In this talk we consider effective multifunctions in the framework of effective topological spaces and study their effective continuity. The results extend earlier results on effective maps.

Learning Classes of Approximations to Non-Recursive Functions

Frank Stephan (frank.stephan@urz.uni-hd.de)
University of Heidelberg (Germany)

Blum and Blum (1975) showed that a class B of suitable recursive approximations to the halting problem K is reliably EX-learnable but left it open whether or not B is in contained in some recursively enumerable class of total functions. By showing B is not included in such a class, we resolve this old problem.

Moreover, variants of this problem obtained by approximating any given recursively enumerable set A instead of the halting problem K are studied. All corresponding function classes $U(A)$ are still EX-inferable but may fail to be reliably EX-learnable, for example if A is non-high and hypersimple.

Blum and Blum (1975) considered only approximations to K defined by monotone complexity functions. We prove this condition to be necessary for making learnability independent of the underlying complexity measure. The class $\tilde{B}$ of all recursive approximations to K generated by all total complexity functions is shown to be not even behaviorally correct learnable for a class of natural complexity measures. On the other hand, there are complexity measures such that $\tilde{B}$ is EX-learnable. A similar result is obtained for all classes $\tilde{U}(A)$.

For natural complexity measures, B is shown to be not robustly learnable, but again there are complexity measures such that B and, more generally, every class $U(A)$ is robustly EX-learnable. This result extends the criticism of Jain, Smith and Wiehagen (1998), since the classes defined by artificial complexity measures turn out to be robustly learnable while those defined by natural complexity measures are not robustly learnable.

This is joint work with Thomas Zeugmann, Medizinische Universität Lübeck

О строении определимо сложнейшего графа

П.Т.Досанбай (dosanbai@mail.ru)
Казахский национальный университет им. Аль-Фараби

Аннотация

В докладе говорится о выразительных возможностях некоторых фрагментов арифметики. Эти вопросы примыкают к работам Дж. Робинсон, Д. Ришара и И. Кореца. Дается ответ на один вопрос из списка И. Кореца.

Пусть $N = \{1, 2, ...\}$ – множество натуральных чисел. Тогда структура $\langle N;\ P_1, ..., P_m, f_1, ..., f_k, c_1, ..., c_s\rangle$ называется *арифметическим*, если предикаты, функции и константы этой структуры являются арифметическими, т.е. выражаются через сложение и умножение в языке логики первого порядка. Арифметическая структура называется *определимо сложнейшей*, если через в данной структуре можно выразить операции сложения и умножения. Следуя [1] определим отношение R на N следующим образом:

$$xRy \Longleftrightarrow x \neq y \wedge (x \mid y \vee y \mid x \vee y = s(x) \vee x = s(y)),$$

где $\mid$ – отношение деления, а s – функция следования. В [1] задан следующий вопрос: "Является ли арифметическая структура $\langle N;\ R\rangle$ определимо сложнейшей?" В предлагаемой работе дается утвердительный ответ на этот вопрос.

Прежде всего заметим, что единица и отношение равенства определимы в данной сигнатуре. Далее, введем некоторые необходимые обозначения:

$xEy \rightleftharpoons x \mid y$ или $y \mid x$

и

$xSy \rightleftharpoons x = s(y)$ или $y = s(x)$.

Обозначим через $supp(x)$ множество простых делителей x. Отношения E и S называются, соответственно отношениями сравнимости (по делимости) и соседства. Тогда

$$xRy \Longleftrightarrow x \neq y \wedge (xEy \vee xSy).$$

Лемма. *Натуральные числа* $1 < x < y$ *являются степенями одного итого же простого числа тогда и только тогда, когда они удовлетворяют следующей двуместной формуле:*

$$\varphi(x,y) \rightleftharpoons x \neq 1 \wedge R(x,y) \wedge \exists uv(uRy \wedge vRy \wedge \forall t(t \neq u \wedge t \neq v \wedge tRy \rightarrow tRx).$$

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $(x,y) = (p^{\alpha}, p^{\beta})$ и $0 < \alpha < \beta$. Тогда положим $u = y - 1$ и $v = y + 1$.

($\Leftarrow$) Пусть x и y удовлетворяют формуле $\varphi(x,y)$. Так как xRy, необходимо рассмотреть возможности xEy и xSy.

Случай xSy. Если $x = y - 1$, положим $t = y \cdot p$ для некоторого простого числа $p > x$. Тогда tRy и $\neg(tSx)$. Так как $t = y \cdot p = x \cdot p + p \equiv p \not\equiv 0(\mod x)$, то $\neg(tEx)$, т.е. $\neg(tRx)$. Поэтому данные x и y не удовлетворяют указанной формуле. Аналогично рассматривается второй случай $x = y + 1$. Таким образом, числа, удовлетворяющие формуле $\varphi(x,y)$, не могут быть соседями.

Случай xEy. Рассмотрим две возможности.

1. x делится на y. Тогда для любого простого p вне $supp(x)$ число $t = y \cdot p$ удовлетворяет соотношениям tRy и $\neg(tRx)$. Поэтому эту возможность можно отбросить.

2. x делит y. Заметим,что можно предполагать $supp(x) = supp(y)$. Если это не так, то существует простое число $p \in supp(y) \setminus supp(x)$. Теперь, если в качестве t возьмем число $t = y \cdot p$, то tRy, но $\neg(tRx)$, противоречие с формулой $\varphi(x,y)$. Теперь, так как $supp(x) = supp(y)$, то $|supp(x)| = |supp(y)|$. Пусть $|supp(x)| = |supp(y)| > 1$. Тогда для некоторого простого p, участвующего в разложениях данных чисел, для соответствующих степеней α и β из разложения x и y имеем $\beta - \alpha > 0$. Тогда для $t = p^{\beta}$ получим tRy, но $\neg(tRx)$. Значит, $|supp(x)| = |supp(y)| = 1$. А так как x делит y, имеем $(x,y) = (p^{\alpha}, p^{\beta})$ и $\alpha < \beta$. Лемма доказана.

Теперь определим отношение "x - простое число".

Следствие 1. i) x – *простое число тогда и только тогда, когда* x *удовлетворяет формуле*

$$\rho(x) \rightleftharpoons \exists y \varphi(x,y) \wedge \neg \exists z(z \neq 1 \wedge \varphi(z,x)).$$

ii) *число* z *является соседом простого числа* p *тогда и только тогда, когда* z *удовлетворяет формуле*

$$\psi(p,z) \rightleftharpoons (p = 2 \wedge z = 1) \vee (pRz \wedge \neg \varphi(p,z)).$$

iii) *простое число* p *делит число* v *тогда и только тогда, когда они удовлетворяют формуле*

$$\delta(p,v) \rightleftharpoons v \neq 1 \wedge \neg \psi(p,v) \wedge [pRv \vee p = v].$$

Используя лемму и следствие 1 мы можем определить отношения сравнимости по делению и соседства.

Следствие 2. i) xEy тогда и только тогда, когда x и y удовлетворяют формуле

$$x = y \vee x = 1 \vee y = 1 \vee [xRy \wedge \exists z(\rho(z) \wedge \delta(z,y) \wedge \delta(z,y))].$$

ii) xSy тогда и только тогда, когда x и y удовлетворяют формуле

$$xRy \wedge \neg(xEy).$$

Таким образом, отношения S и E определимы через отношение R. В [3] было установлено, что через E можно выразить отношение делимости $|$. В работе [4] доказано, что структура $\langle N;\ S, | \rangle$ является определимо сложнейшей. Тогда из этих фактов и вышеустановленных результатов как следствие получается следующая

Теорема. *Арифметическая структура* $\langle N;\ R \rangle$ *является определимо сложнейшей.*

В работе [1] отмечается, что существует пример определимо сложнейшего арифметического графа на натуральных числах с нулем, но он не приводится в [1], поскольку его описание не просто. С помощью структуры $\langle N;\ R \rangle$ можно получить более простой пример определимо сложнейшего арифметического графа на множестве неотрицательных целых чисел, что было замечено в [1].

Литература

1. Ivan Korec, *A list of arithmetical structures strongest with respect to the first order definability,* Preprint № 33 of Math. Inst. Slovak Acad. Sci., Bratislava, 1996.
2. J.Robinson, *Definability and decision problems in arithmetic,* Journal of Symbolic Logic, 14 (1949), 98-114.
3. П.Т. Досанбай, *Об одной определимо сложнейшей структуре*, Вестник КазНУ, серия математика, № 2 (2002), 18-23.
4. Ivan Korec, *Definability of addition from multiplication and neighbourhood relation and some related results,* Proceedings the Conference Analytic and Elementary Number Theory, Vienna, July 16-20, 1995.

Функции Рыль-Нардзевского счетно категоричных теорий

К.А. Мейрембеков (meirembekov@yahoo.com)
Казахский национальный университет им. аль-Фараби

Все рассматриваемые теории являются теориями первого порядка в конечном чисто реляционном языке L. Если теория T счетно категорична, то функцией $f_T(n)$ Рыль-Нардзевского теории T определена как количество атомов булевой алгебры $F_n(T)$ Линденбаума-Тарского этой теории. Как известно, если теория T разрешима и счетно категорична, то её счетная модель автоустойчива в том и только в том случае, если функция Рыль-Нардзевского рекурсивна.

Одним из мощных методов построения счетно категоричных теорий является метод Фраиссе [2]. Если K класс типов изоморфизма конечных моделей языка L имеющий наследственное свойство HP, свойство совместного вложения JEP и свойство амальгамирования AP, то существует однозначно определенная счетная модель M_K, теория которой счетно категорична, имеет элиминацию кванторов и её возраст $age(M_K)$ совпадает с K. Класс моделей K со свойствами HP, JEP, AP называется классом Фраиссе, а модель M_K – генерической для этого класса. Обозначим через T_K теорию этой модели.

Конечную модель A языка L назовем запретной для класса Фраиссе K, если $A \notin K$, но любая её собственная подмодель лежит в K. Существует эффективная процедура перечисления всех типов изоморфизма конечных моделей сигнатуры L. Семейство некоторых типов изоморфмзма конечных моделей рекурсивно перечислимо, если оно рекурсивно перечислимо в этой нумерации. Через $k(n)$ обозначим число n-элементных моделей из класса K и k назовем функцией возраста этого класса.

Теорема 1 *Если T теория генерической модели для класса Фраиссе K, то*

- *T разрешима тогда и только тогда, когда семейство запретных конечных моделей для K рекурсивно перечислимо;*
- *функция Рыль-Нардзевского $f_T(n)$ теории T рекурсивна тогда и только тогда, когда функция возраста $k(n)$ класса K рекурсивна.*

В связи с известным вопросом Перетятькина о существовании разрешимой счетно категоричной конечноаксиоматизируемой теории с нерекурсивной функцией Рыль-Нардзевского [3] представляет интерес его локализация на соответствующие теории генерических моделей для классов Фраиссе.

Вопрос 1 *Верно ли, что для каждой квази конечноаксиоматизируемой счетно категоричной теории T существует квази конечноаксиоматизируемая счетно категоричная теория T_0 с элиминацией кванторов такая, что функции Рыль-Нардзевского этих теорий совпадают?*

Литература

[1] *W. Glassmire*, There are $2^{\aleph_0}$ countably categorical theories, Bull. Acad. Pol. Sci, ser. math.,phys., astron., 1971, 359, № 19, 185 – 190.

[2] *W. Hodges*, Model theory, Cambridge University Press, 1993.

[3] *М.Г. Перетятькин*, Конечно аксиоматизируемые теории, Новосибирск, Научная книга, 1996.

Степени алгебраических систем и Σ-определимость[4]

А.Н. Хисамиев

Рассматриваются только счетные алгебраические системы конечных сигнатур. Л. Рихтер в [6] введено условие вычислимой вложимости алгебраической системы и показано, что если для счетной не конструктивизируемой системы справедливо условие вычислимой вложимости, то она не имеет степени. В данной работе доказано: абелева p-группа (булева алгебра) $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию вычислимой вложимости; любая не конструктивизируемая абелева p-группа (булева алгебра) $\mathfrak{A}$ не имеет степени; если антисимметричная связанная модель $\mathfrak{N}$ Σ-определима в наследственно конечном допустимом множестве $\mathbb{H}F(\mathfrak{A})$ над счетной булевой алгеброй $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{N}$ конструктивизируема; если L – линейный порядок Σ-определимый в $HF(\mathfrak{A})$ над счетной булевой алгеброй $\mathfrak{A}$, то L – конструктивизируем.

Все используемые и неопределяемые понятия содержатся в [1, 2, 3]. Мы приведем лишь некоторые из них. Пусть дана алгебраическая система $\mathfrak{A}$ сигнатуры σ и A_0 – подмножество основного множества $|\mathfrak{A}|$. Тогда через $\langle \mathfrak{A}, A_0 \rangle$ обозначим обогащение системы $\mathfrak{A}$ константами $\{a \mid a \in A_0\}$ и полагаем $a^{\langle \mathfrak{A}, A_0 \rangle} = a$. Если $A_0 = \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$, то $\langle \mathfrak{A}, A_0 \rangle$ будет также обозначать через $\langle \mathfrak{A}, \overline{a} \rangle$.

Пусть даны конечные модели $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ сигнатуры σ и $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$. Пусть $|B| = \{b_0, \ldots, b_{n-1}\}$ и $|C| \setminus |B| = \{c_0, \ldots, c_{r-1}\}$. Тогда через $\Phi_{\mathfrak{C}}(\bar{b}, \bar{c})$ обозначим конъюнкцию всех атомных и отрицания атомных предложений, истинных в модели $\left\langle \mathfrak{C}, \bar{b}, \bar{c} \right\rangle$. Пусть $\varphi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ – вложение модели $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$. Через $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B},\varphi}$ обозначим семейство всех конечных моделей $\mathfrak{C}$ для которых существует вложение ψ модели $\mathfrak{C}$ в $\mathfrak{A}$ такое, что $\psi \restriction \mathfrak{B} = \varphi$. Пусть $\Psi_{\mathfrak{C}}(\bar{b}') = \exists \bar{x} \Phi_{\mathfrak{C}}(\bar{b}', \bar{x})$, где $\varphi b_i = b_i'$, $i < n$.

Пусть зафиксирована геделева нумерация γ всех формул сигнатуры $\sigma \cup \{b_0', \ldots, b_{n-1}'\}$. Номером модели $\mathfrak{C} \supseteq \mathfrak{B}$ назовем номер формулы

[4]Работа выполнена при поддержке гранта ИНТАС-00-499

$\Psi_{\mathfrak{C}}(\bar{b}')$. Пусть $\mathfrak{A}$ – локально конечная система, $\mathfrak{B}$ – конечная система и $\varphi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ – вложение. Через $\bar{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B},\varphi}$ обозначим множество всех конечных систем $\mathfrak{C}$ таких, что существует вложение $\psi : \mathfrak{C} \to \mathfrak{A}$, расширяющее φ, то есть $\psi \restriction \mathfrak{B} = \varphi$.

Мы покажем, что если $\mathfrak{A}$ – абелева p-группа (булева алгебра), то семейство $\bar{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B},\varphi}$ вычислимо. Отсюда и из аналога следующего результата [6] будет следовать, что любая счетная не конструктивизируемая абелева p-группа (булева алгебра) не имеет степени. Для булевых алгебр это отмечено (без доказательства) в работе [6]. В §2 для полноты изложения приводится доказательство этого утверждения. Пусть $\mathfrak{A}$ некоторая счетная система. В [6] дано

Определение 1 [6] *Если для любых конечной модели $\mathfrak{B}$ и вложения $\varphi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ семейство $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B},\varphi}$ вычислимо, то говорят, что для модели $\mathfrak{A}$ справедливо условие вычислимой вложимости.*

Теорема 1 [6] *Если для счетной не конструктивизируемой модели справедливо условие вычислимой вложимости, то она не имеет степени.*

Пусть $\mathfrak{A}$ – локально конечная система. Введем следующий аналог определения 1.

Определение 2 *Если для любых конечной системы $\mathfrak{B}$ и вложения $\varphi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ семейство $\bar{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B},\varphi}$ вычислимо, то говорят, что для модели $\mathfrak{A}$ справедливо условие вычислимой вложимости систем.*

Из доказательства теоремы 1 следует

Следствие 1 *Если не конструктивизируемая счетная локально конечная система $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условию вычислимой вложимости систем, то она не имеет степени.*

§1. Абелевы p-группы

В дальнейшем под словом группа понимается абелева p-группа. Введем некоторые обозначения. Пусть G – группа и $g \in G$. Через $|g|$ обозначается порядок элемента g, $p^nG = \{g \in G \mid \exists g_1(g = p^n g_1)\}$, $G[p^n] = \{g \in G \mid p^n g = 0\}$. Минимальное число p^n такое, что $p^nG = 0$

называется порядком группы G и обозначается через $|G|$. Если такого числа не существует, то говорят, что G не ограничена. Высотой $h_G(g)$ элемента g называется такое наибольшее число $m \geq 0$, что в G истинна формула $\exists x(g = p^m x)\ \&\ \forall y(g \neq p^{m+1}y)$. Если такого m нет, то $h_G(g) = \infty$. Z_{p^n} – циклическая группа порядка p^n. Любой изоморфизм группы G_0 в G называется вложением G_0 в G. Наибольший общий делитель чисел n и m обозначается (n, m).

Лемма A *Пусть A – произвольная абелева группа (не обязательно p-группа), а B – конечная сервантная подгруппа. Тогда B выделяется прямым слагаемым.*

Предложение B [5, стр. 83] *Если редуцированная группа G неограничена, то G имеет прямое слагаемое, являющиеся неограниченной прямой суммой циклический групп.*

Из доказательства предложения 27.1 [4, стр. 139] следует

Предложение C *Пусть порядок группы C равен p^n, $c \in C$, $|c| = p^n$ и подгруппа $B \subseteq C$ такая, что $B \cap (c) = 0$. Тогда существует подгруппа $E \supseteq B$ такая, что $C = E \oplus (c)$.*

Теорема 2 *Для любой счетной группы G справедливо условие вычислимой вложимости систем.*

Доказательство. Пусть B – конечная группа и $\varphi : B \to C$ – вложение. Известно, что $G = R \oplus D$, где R – редуцированная, а D – делимая части группы G. Если группа R ограничена, то G сильно конструктивизируема. Отсюда легко следует, что для группы G справедливо условие вычислимой вложимости систем. Теперь пусть редуцированная часть группы G неограничена. Тогда теорема непосредственно следует из

Предложение 1 *Пусть G счетная группа с неограниченной редуцированной частью, B, C – конечные группы, $B \subseteq C$ и $\varphi : B \to G$ является вложением B в C. Тогда существует вложение $\psi : C \to G$ тогда и только тогда, когда для любого элемента $b \in B$ справедливо неравенство*

$$h_C(b) \leq h_G(b'), \tag{1}$$

где $\varphi b = b'$.

Доказательство. Необходимость очевидна.

Доказательство достаточности проведем индукцией по числу элементов группы C. Пусть порядок $|C|$ группы равен p^n, то есть $\forall c \in C(p^n c = 0)$, и $c \in C$ такой, что $|c| = p^n$. Допустим, что $(c) \cap B = 0$. Тогда по предложению C существует подгруппа $E \subseteq C$ такая, что $C = (c) \oplus E$ и $E \supseteq B$. По индукции существует вложение $\psi_0 : E \to G$, $\psi_0 \restriction B = \varphi$. По предположению B существует элемент c' такой, что $(c') \cap E' = 0$, $|c'| = p^n$, где $E' = \psi_0 E$. Очевидно, что ψ_0 можно продолжить до $\psi : C \to G$, положив $\psi c = c'$. Поэтому можно считать, что $(c) \cap B \neq 0$.

Для каждого элемента c порядка p^n через k_c обозначим такое наименьшее число, что $p^{k_c} c \in B$. Пусть $c_0 \in C[p^n]$ такой элемент, что k_{c_0} имеет наименьшее значение. Положим $c = c_0$, $k = k_{c_0}$.

Пусть

$$p^k c = b_0. \tag{2}$$

Покажем, что существует такой элемент c', что $p^k c' = b'_0$, где $\varphi b_0 = b'_0$, и для любого $s < k$ верно $p^s c' \notin B'$.

Так как подгруппа (c) сервантна в C, то $h_C(b_0) = k$. Поэтому в G существует элемент g_0 такой, что $p^k g_0 = b'_0$. Пусть s минимальное такое число, что $p^s g_0 \in B'$. Если $s = k$ то $c' = g_0$ искомый элемент. Пусть $s < k$. По предложению B существует элемент $g_1 \in G$ такой, что $|g_1| = p^k$ и $(g_1) \cap G_0 = 0$, где $G_0 = \text{гр}(B', g_0)$. Положив $c' = g_0 + g_1$. Тогда имеем $p^k c' = b'_0$. Покажем, что для любого $s < k$ верно $p^s c' \notin B'$. Действительно, пусть, напротив, для некоторого $s < k$ верно $p^s c' \in B'$. Тогда $p^s g_0 + p^s g_1 = b' \in B'$. Отсюда $0 \neq p^s g_1 \in G_0$. Противоречие.

Пусть $H = \text{гр}(B, c)$, $H' = \text{гр}(B', c')$. Определяющие соотношения группы H будут соотношения между элементами группы B и соотношение $p^k c = b$. Определяющие соотношения группы H' такие же. Отсюда существует изоморфизм $f : H \to H'$ такой, что $f \restriction B = \varphi$.

Пусть

$$C = (c) \oplus E. \tag{3}$$

Пусть $E_0 = \text{пр}_E(B)$, то есть E_0 – проекция подгруппы B на вторую координату для разложения (3). Пусть $e \in E_0$. Тогда найдется элемент $b \in B$ и число $s \in \omega$ такие, что

$$b = p^s \alpha c + e, \quad (\alpha, p) = 1. \tag{4}$$

Покажем, что

$$h_C(e) \leq h_G(e'), \tag{5}$$

где $e' = fe$.

Пусть $h_C(e) = r$. Покажем, что либо $e \in B$, либо справедливо неравенство

$$r < s. \tag{6}$$

Если $s \geq k$, то из (2), (4) следует, что $e \in B$.

Пусть $s < k$. Покажем справедливость (6). Допустим противное, $r \geq s$. Существует элемент $e_1 \in E$ такой, что $e = p^r e_1$. Отсюда и из (4) имеем $b = p^s(\alpha c + p^{r-s} e_1)$. Так как $(\alpha, p) = 1$, то элемент $c_1 = \alpha c + p^{r-s} e_1$ имеет порядок p^n и $k_{c_1} < k$. Это противоречит выбору элемента c. Поэтому (6) справедливо.

Так как $f : H \to H'$ изоморфизм, то справедливо равенство

$$b' = p^s \alpha c' + e'. \tag{7}$$

Покажем, что имеет место

$$h_G(e') \geq r. \tag{8}$$

Если $e \in B$, то (8) следует из условия предложения и определения f.

Пусть $e \notin B$. Тогда справедливо неравенство (6). Отсюда и из (4) имеем $h_C(e) = h_G(b) = r$. Следовательно $h_G(b') \geq r$. Отсюда и из (7) имеем: $h_G(e') \geq min\{h_G(b'), s\} \geq r$, то есть неравенство (5) доказано.

Вложение $\varphi_0 = f \restriction E_0$ подгруппы E_0 в G и подгруппы $E_0 \subseteq E$ удовлетворяет условию (1) предложения. По индукции существует вложение $\psi_0 : E \to G$ такой, что $\psi_0 \restriction E_0 = \varphi_0$. Покажем, что верно равенство

$$\psi_0 E \cap (c') = 0. \tag{9}$$

Допустим противное, то есть существует $e \in E$, $e \neq 0$ такой, что

$$\psi_0 e = p^s c'. \tag{10}$$

Можно считать, что $|e| = p$ и $s \geq k$. Действительно, если $s < k$, то из (10) имеем

$$\psi_0 p^{n-s-1} e = p^{n-1} c'.$$

Отсюда и из $k \leq n-1$ следует, что в качестве элемента e можно взять $p^{n-s-1}e$. Таким образом $|e| = p$ и $s \geq k$. Покажем, что можно предполагать, что $e \in E_0$. Действительно, допустим $e \notin E_0$, $h_C(e) = h_E(e) = m$ и $p^m e_1 = e$ для некоторого элемента $e_1 \in E$. Подгруппа (e_1) сервантна в E, а поэтому существует подгруппа $E_1 \subseteq E$ такая, что

$$E = (e_1) \oplus E_1.$$

Так как $e \notin E_0$, то $\text{пр}_{(e_1)} B = 0$. Отсюда и из (3) следует, что $C = (c) \oplus (e_1) \oplus E_1$ и $B \subseteq (c) \oplus E_1$. По предложению B для доказательства предложения достаточно вложить подгруппу $(c) \oplus E_1$ в G. Это возможно по индукции. Поэтому будем считать, что $e \in E_0$. Отсюда и из (10) имеем

$$\psi_0 e = \varphi_0 e = fe = p^s c' = p^{s-k} b_0'. \tag{11}$$

По определению изоморфизма $f : H \to H'$ имеем

$$f p^{s-k} b_0 = \varphi p^{s-k} b_0 = p^{s-k} b_0'. \tag{12}$$

Из (11) и (12) получим, что

$$e = p^{s-k} b_0.$$

Отсюда $e \in (c) \cap E$, что невозможно. Поэтому равенство (9) справедливо. Отсюда вложение $f : (c) \to (c')$ и $\psi_0 : E \to G$ продолжаются до требуемого вложения $\psi : C \to G$. Предложение, а вместе с ним и теорема доказаны.

□

Заметим, что существуют периодические p-группы и группы без кручения, которые не являются локально конструктивизируемыми. Действительно, пусть S не вычислимо перечислимое множество простых чисел и $G_0 = \bigoplus\limits_{p \in S} Z_p$, $G_1 \subseteq Q$ и $G_1 = \text{гр}\{\frac{1}{p} \mid p \in S\}$. Легко проверить, что $\exists$-теории G_0 и $\langle G_1, 1\rangle$ не вычислимо перечислимы. Из теоремы 2 и следствия 1 получаем

Следствие 2 *Любая счетная не конструктивизируемая группа не имеет степени.*

§2. Булевы алгебры

Приведем некоторые обозначения и известные результаты о булевых алгебрах. Пусть $\mathfrak{A}$ – булева алгебра и $a \in \mathfrak{A}$. Тогда $\widehat{a} \rightleftharpoons \{x \in \mathfrak{A} \mid x \leq a\}$. $\widehat{a}$ – булева алгебра единицей которой является a. Элемент a называется суператомным, если $\widehat{a}$ суператомна. Ординальным типом $\rho(a)$ элемента a называется ординальный тип алгебры $\widehat{a}$, то есть $\rho(a) = o(\widehat{a})$.

Пусть $F(\mathfrak{A})$ идеал Фреше алгебры $\mathfrak{A}$. Если элемент $a \in F(\mathfrak{A})$ является объединением атомов $a_1, \ldots, a_n$, то порядком $|a|$ элемента a называется число n, то есть $|a| = n$. Если же $a \notin F(\mathfrak{A})$, то полагаем $|a| = \omega$. Если $\bar{a} = \langle a_0, \ldots a_{n-1} \rangle$, $a_i \in \mathfrak{A}$, то подалгебра, порожденная элементами a_i, обозначается $\mathfrak{A}(\bar{a})$. Последовательность элементов $a_1, \ldots, a_n$ называется дизъюнктивной, если для любых $i, j < n$, $i \neq j$ верно $a_i \wedge a_j = 0$ и $a_1 \vee \ldots \vee a_n = 1$. $\bar{a}$ обозначается дополнение элемента a.

Лемма B. Если последовательность элементов $a_1, \ldots, a_n$ булевой алгебры $\mathfrak{A}$ дизъюнктивна, то любой элемент $x \in \mathfrak{A}$ имеет единственное представление в виде $x = x_1 \vee \ldots \vee x_n$, где $x_i \in \widehat{a_i}$.

Пусть $\mathfrak{A}$ – счетная булева алгебра, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ – конечные булевы алгебры, $\varphi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ – вложение и $b_0, \ldots, b_{n-1}$ – атомы алгебры $\mathfrak{B}$, $\varphi(b_i) = b'_i$, $i < n$.

Лемма 1 *Булева алгебра $\mathfrak{C}$ принадлежит $\bar{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B},\varphi}$ тогда и только тогда, когда $|b_i| \leq |b'_i|$ для любого $i < n$.*

Доказательство. Пусть алгебры $\widehat{b'_1}, \ldots, \widehat{b'_{k-1}}$ – конечны и число атомов алгебры $\widehat{b'_j}$ равно r_j и $\widehat{b'_k}, \ldots, \widehat{b'_{n-1}}$ – бесконечны.

Пусть $\mathfrak{C} \in \bar{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B},\varphi}$. Так как $\widehat{b_j}$ изоморфна подалгебре конечной булевой алгебры $\widehat{b'_j}$, то число атомов $\widehat{b_j}$ не превосходит числа атомов $\widehat{b'_j}$, то есть $|b_j| \leq |b'_j|$, $j < k$. Поскольку $\widehat{b'_i}$ – бесконечны для $i \geq k$, то $|b'_i| = \omega$.

Докажем достаточность. Пусть число атомов булевой алгебры $\widehat{b_i}$ равно e_i, $i < n$ и $e_j \leq r_j$, $j < k$, и $C_i = \{c_{i1}, \ldots, c_{ie_i}\}$ – множество атомов алгебры $\widehat{b_i}$. Покажем, что существует вложение $\psi_i : \widehat{b_i} \to \widehat{b'_i}$.

1. Пусть $i < k$. В этом случае вместо i будем писать j. По условию $\widehat{b'_j}$ конечна и число ее атомов равно r_j. Пусть $D_j = \{d_{j1}, \ldots, d_{jr_j}\}$ – множество всех ее атомов. Определим отображение $\psi_j : C_j \to D_j$ следующим образом. Если $e_j = r_j$, то $\psi_j(c_{jt}) = d_{jt}$, $t \leq e_j$. Если $e_j < r_j$, то положим $\psi_j(c_{jt}) = d_{jt}$, $t < e_j$, $\psi_j(c_{je_j}) = b'_j \setminus \bigcup\limits_{t<e_j} d_{jt}$. Отображение ψ_j можно продолжить до вложения $\psi_j : \widehat{b_j} \to \widehat{b'_j}$ и $\psi_j(b_j) = b'_j$.

2. Пусть $i \geq k$ и число атомов булевой алгебры $\widehat{b'_i}$ равно α_i. Если это число бесконечно, то $\alpha_i = \omega$. Если $e_i \leq \alpha_i$, то также как и в случае 1 можно построить вложение $\psi_i : \widehat{b_i} \to \widehat{b'_i}$.

Допустим $e_i > \alpha_i$. Через $D_i = \{d_{i1}, \ldots, d_{i\alpha_i}\}$ обозначим множество всех атомов алгебры $\widehat{b'_i}$ и $d = d_{i0} \vee \ldots \vee d_{i\alpha_i}$. Тогда $\widehat{\overline{d}}$ – безатомная алгебра. Пусть $e_i - \alpha_i = n_i > 0$. Выберем в $\widehat{\overline{d}}$ дизъюнктивные элементы $d_1, \ldots, d_{n_i}$. Определим отображение $\psi_i : \widehat{b_i} \to \widehat{b'_i}$ следующим образом: $\psi_i(c_{it}) = d_{it}$, если $t \leq \alpha_i$ и $\psi_i(c_{i\alpha_i+1}) = d_1, \ldots, \psi_i(c_{ie_i}) = d_{n_i}$. Отображение ψ_i можно продолжить до требуемого вложения $\psi_i : \widehat{b_i} \to \widehat{b'_i}$.

По лемме B вложения ψ_i, $i < n$, определяют требуемое вложение $\psi : \mathfrak{C} \to \mathfrak{A}$. Следовательно $\mathfrak{C} \in \bar{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{B},\varphi}$.

□

Из леммы 1 следует

Теорема 3 *Для любой счетной булевой алгебры $\mathfrak{A}$ справедливо условие вычислимой вложимости систем.*

Отсюда и следствия 1 получаем

Следствие 3 *Любая счетная не конструктивизируемая булева алгебра не имеет степени.*

Из теоремы 1 [8] и леммы 1 вытекает

Следствие 4 *Пусть $\mathfrak{A}_1$, $i = 0, 1$ – булевы алгебры и $x_i \in HF(\mathfrak{A}_i)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. $\langle HF(\mathfrak{A}_0), x_0\rangle \equiv_1 \langle HF(\mathfrak{A}_1), x_1\rangle$.

2. *Существуют число n и элемент $\varkappa \in HF(n)$, последовательности $\bar{p}_i = \left\langle p_0^i, \ldots, p_{n-1}^i\right\rangle$, $p_j^i \in \mathfrak{A}_i$ и атомы $u_0^i, \ldots, u_{m-1}^i$ алгебр $\mathfrak{A}_i(\bar{p}_i)$, порожденные $\bar{p}_i$, такие, что $x_i = \varkappa(\bar{p}_i)$, $|u_j^0| = |u_j^1|$, и отображение $f : \mathfrak{A}_0(\bar{p}_0) \to \mathfrak{A}_1(\bar{p}_1)$, определенное равенствами $f(u_j^0) = u_j^1$, есть изоморфизм и $f(\bar{p}_0) = \bar{p}_1$.*

Следующая лемма есть аналог замечания 1 [7].

Лемма C. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{M}'$ *– модели одной сигнатуры, причем* $\mathfrak{N}$ *является* Σ*-определимой в* $\mathfrak{M}$ *формулами* $\varphi, \psi_0, \ldots$, *где* ψ_0 *– определяет эквивалентность* η *с параметрами* $\bar{a} \in M$. *Пусть существует* $\bar{b}$ *из* M' *такой, что* $\langle \mathfrak{M}, \bar{a} \rangle \equiv_1 \left\langle \mathfrak{M}', \bar{b} \right\rangle$ *и отношение* $T \subseteq M^\omega \times M^{\omega'}$ *такое,что* $T(\bar{x}, \bar{y}) \to \langle \mathfrak{M}, \bar{a}, \bar{x} \rangle \equiv_1 \left\langle \mathfrak{M}', \bar{b}, \bar{y} \right\rangle$, $\forall \bar{x} \in M^\omega \exists \bar{y} \in M^{\omega'} T(\bar{x}, \bar{y})$ & $\forall \bar{y} \in M^{\omega'} \exists \bar{x} \in M^\omega T(\bar{x}, \bar{y})$ *и* $T(\bar{x}, \bar{y}) \to T(x_i, y_i)$, *причем*

1. $T(x, y)$ & $T(x', y)$ & $\varphi(x) \to \psi_0(x, x')$
2. $T(x, y)$ & $T(x, y')$ & $\varphi(x) \to \psi_0'(y, y')$,

где ψ_0' *получается из* ψ_0 *заменой* $\bar{a}$ *на* $\bar{b}$. *Тогда в* $\mathfrak{M}'$ *определима* $\mathfrak{N}$ *посредством* $\varphi', \psi_0', \ldots$, *которые получаются из* $\varphi, \psi_0, \ldots$ *заменой* $\bar{a}$ *на* $\bar{b}$.

Лемма 2 *Если элемент* a *не суператомный, то для любого* n *существуют элементы* $c_1, \ldots, c_n$ *такие, что* $|c_i| = \omega$ *и* $a = c_1 \vee \ldots \vee c_n$, $c_i \wedge c_j = 0$, $i \neq j$.

Пусть для модели $\mathfrak{N}$ сигнатуры $\langle P^2 \rangle$ справедливы условия:

1. $\mathfrak{N} \models \forall x \forall y (P(x, y) \vee P(y, x))$.
2. $\mathfrak{N} \models \forall x \forall y (P(x, y) \& P(y, x) \to x = y)$.

Следующая теорема обобщает теорему 2 [7].

Теорема 4 *Пусть* $\mathfrak{A}$ *– счетная булева алгебра и модель* $\mathfrak{N}$ Σ*-определима в* $HF(\mathfrak{A})$. *Тогда* $\mathfrak{N}$ *конструктивизируема.*

Доказательство. Пусть модель $\mathfrak{N}$ Σ-определима в $HF(\mathfrak{A})$. Если алгебра $\mathfrak{A}$ конструктивизируема, то и модель $\mathfrak{N}$ конструктивизируема. Поэтому можно считать, что $\mathfrak{A}$ не конструктивизируема. Отсюда следует, что справедливо условие: если булева алгебра $\mathfrak{A}$ суператомна, то ее ординальный тип $o(\mathfrak{A}) > 3$. Определим булеву алгебру $\mathfrak{B}$ следующим образом. Если $\mathfrak{A}$ атомная алгебра, то $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_{\omega^3}$. Если $\mathfrak{A}$ не является атомной, то $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_{\omega^3} \bigoplus \mathfrak{B}_\eta$, где η счетный плотный линейный порядок без концов. По лемме C достаточно построить соответствие $T : HF(\mathfrak{A}) \to HF(\mathfrak{B})$ которое удовлетворяет условиям этой леммы.

Определим частичный изоморфизм $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ следующим образом. Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ не является атомной. Пусть $U = \{u_1, \ldots, u_p\}$

– множество всех атомов булевой алгебры $\mathfrak{A}(\bar{a})$. Определим отображение $f_0 : U \to \mathfrak{B}$, $f_0(u_i) = v_i$. Дизъюнктные элементы v_i определяем так, чтобы выполнялись следующие условия. Рассмотрим возможные случаи:

1. u_i – суператомный элемент.
Тогда, если $\tau(u_i) < \langle 3, 1\rangle$, то $\tau(v_i) = \tau(u_i)$.
Если же $\tau(u_i) \geq \langle 3, 1\rangle$, то $\tau(v_i) \geq \langle 3, 1\rangle$.

2. u_i – атомный, но не суператомный.
Тогда $\tau(v_i) \geq \langle 3, 1\rangle$.

3. $u_i = u_i' \vee u_i''$, где u_i' – атомный или $u_i' = 0$, а u_i'' – безатомный.
Тогда $v_i = v_i' \vee v_i''$, где v_i' определяется по u_i' также как и в случаях 1, 2, а v_i'' –безатомный элемент.

4. Случаи 1–3 не имеют места.
Тогда $v_i = v_i' \vee v_i''$, где $\tau(v_i') \geq \langle 3, 1\rangle$, а v_i'' –безатомный элемент.

Если же $\mathfrak{A}$ является атомной, то могут быть только случаи 1, 2. Тогда элементы $v_i \in \mathfrak{B}$ определяем также, как они определены в случаях 1, 2.

Отображение f_0 можно продолжить до изоморфного вложения $f : \mathfrak{A}(\bar{a}) \to \mathfrak{B}$. Полагаем $b_i = f(a_i)$. Пусть частичный изоморфизм $f^* : HF(\mathfrak{A}) \to HF(\mathfrak{B})$ продолжает f и $\bar{b} = f^*(\bar{a})$. По следствию 4 имеем $\langle HF(\mathfrak{A}), \bar{a}\rangle \equiv_1 \left\langle HF(\mathfrak{B}), \bar{b}\right\rangle$. Действительно, пусть $u_i = a_1^{\varepsilon_{i_1}} \wedge \ldots \wedge a_k^{\varepsilon_{i_k}} \rightleftharpoons \bar{a}^{\bar{\varepsilon}_i}$, где $\varepsilon_j = 0, 1$. Тогда $v_i = f(u_i) = f(\bar{a}^{\bar{\varepsilon}_i}) = \bar{b}^{\bar{\varepsilon}_i}$. Следовательно v_i является атомом булевой алгебры $\mathfrak{B}(\bar{b})$ и из определения функции f следует, что $|u_i| = |v_i|$.

Определим соответствие $T : HF(\mathfrak{A}) \to HF(\mathfrak{B})$ следующим образом. Пусть $x \in HF(\mathfrak{A})$, $y \in HF(\mathfrak{B})$. Полагаем $T(x, y)$ тогда и только тогда, когда существует частичный изоморфизм $g : HF(\mathfrak{A}) \to HF(\mathfrak{B})$ удовлетворяющий условиям:

1. g продолжает f^*.

2. Если $x = \varkappa(\bar{p})$, то $y = g(x) = \varkappa(\bar{q})$.

3. Существуют атомы $x_i, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ соответственно булевых алгебр $\mathfrak{A}(\bar{a}, \bar{p})$ и $\mathfrak{B}(\bar{b}, \bar{q})$ такие, что $|x_i| = |y_i|$ и $g(x_i) = y_i$, $g(p_j) = q_j$ для любых i, j.

Докажем, что для соответствия T справедливы все условия леммы C.

Лемма 3 *Для каждого элемента $x \in HF(\mathfrak{A})$ существует элемент $y \in HF(\mathfrak{B})$ такой, что $T(x, y)$.*

Доказательство. Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ не атомна. Другой случай рассматривается аналогично. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ атомы булевой алгебры $\mathfrak{A}(\bar{a}, \bar{p})$. Для каждого элемента x_i определим элемент y_i следующим образом. Пусть для определенности $i = 1$ и $u_1 = x_1 \vee \ldots \vee x_t$, где элементы u_j, v_j такие же, как и при определении отображения f. Рассмотрим возможные случаи:

1. u_1 – атомный элемент. Если же u_1 – суператомный, то и v_1 – суператомный. Тогда существует такое разбиение элемента v_1 на $y_1, \ldots, y_t$, что $|x_i| = |y_i|$, $1 \leq i \leq t$. Если же u_1 – не суператомный, то v_1 такой, что $\tau(v_i) \geq \langle 3, 1 \rangle$. Тогда опять существует $\{y_i\}$, что $|x_i| = |y_i|$.

2. Пусть $u_1 = u_1' \vee u_1''$, где u_1' – атомный, а u_1'' – безатомный. Тогда $x_i = x_i' \vee x_i''$, где $x_i' = x_i \wedge u_1'$, $x_i'' = x_i \wedge u_1''$ и элемент $v_1 = v_1' \vee v_1''$, где v_1' – атомный и v_1'' – безатомный. Тогда по случаю 1 можно найти такие элементы $\{y_i'\}$, что $|x_i'| = |y_i'|$. Разобьем элемент v_1'' на $\{y_i''\}$ так, что $x_i'' = 0 \Leftrightarrow y_i'' = 0$. Положим $y_i = y_i' \vee y_i''$.

3. Пусть не выполнены случаи 1 и 2. Тогда u_1 содержит бесконечное число атомов и безатомный элемент. Тогда $v_1 = v_1' \vee v_1''$, где $\tau(v_i') \geq \langle 3, 1 \rangle$, v_1'' – безатомный элемент. Выберем разбиение $\{y_i\}$ элемента v_1 следующим образом. Пусть x_i – атомный элемент. Тогда существует $y_i < v_1'$, что $|x_i| = |y_i|$. Допустим $x_i = x_i' \vee x_i''$, где x_i' – атомный и x_i'' – безатомный элементы. Тогда можно найти $y_i = y_i' \vee y_i''$ такой, что y_i' – атомный, y_i'' – безатомный элементы и $|x_i'| = |y_i'|$. Допустим для x_i не выполнены предшествующие случаи. Тогда найдем $y_i = y_i' \vee y_i''$, такой что y_i' – атомный, y_i'' – безатомный элементы и $|x_i'| = |y_i'|$.

Таким образом, определены $y_1, \ldots, y_t$; элементы $y_{t+1}, \ldots, y_n$ определяются аналогично.

□

Лемма 4 *Для каждого элемента $y \in HF(\mathfrak{B})$ существует элемент $x \in HF(\mathfrak{A})$ такой, что $T(x, y)$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_{\omega^3} \bigoplus \mathfrak{B}_\eta$. Тогда алгебра $\mathfrak{A}$ не атомна. Пусть $v_1 = y_1 \vee \ldots \vee y_t$. Определим $x_1, \ldots, x_t$ из $\mathfrak{A}$. Рассмотрим возможные случаи:

1. Пусть $v_1 \in \mathfrak{B}_{\omega^3}$. Тогда $x_1, \ldots, x_t$ определяются как и в случае 1 леммы 12.

2. Пусть $v_i \in \mathfrak{B}_\eta$. Тогда u_1 – безатомный элемент. Разбиение $\{x_i\}$ элемента u_1 такое, что выполнена эквивалентность $x_i = 0 \Leftrightarrow y_i = 0$, будет искомым.

3. Пусть $v_1 = v_1' \vee v_1''$, $v_1' \in \mathfrak{B}_{\omega^3}$, $v_1'' \in \mathfrak{B}_\eta$.

Тогда рассмотрим возможные случаи:

1. Пусть $u_1 = u_1' \vee u_1''$, где u_1' – атомный, u_1'' – безатомный элементы. Если $\tau(v_1') < \langle 3,1\rangle$, то элемент u_1' суператорный и $\tau(u_1') = \tau(v_1')$. Поэтому, если $y_i = y_i' \vee y_i''$, то u_1' можно разбить на $\{x_i'\}$, так что $|x_i'| = |y_i'|$. Если же $\tau(v_1') \geq \langle 3,1\rangle$, то либо u_1' суператорный и $\tau(u_1') \geq \langle 3,1\rangle$, либо атомный, но не суператорный. Из леммы 2 следует, что в любом случае существует такое разбиение $\{x_i'\}$ элемента u_1', что $|x_i'| = |y_i'|$. Элементы x_i'' являющиеся разбиением u_1'' определяются из условия: $x_i'' = 0 \Leftrightarrow y_i'' = 0$. Элементы $x_i = x_i' \vee x_i''$ будут искомыми.

2. Пусть не выполнен случай 1. Следовательно $\tau(v_1') \geq \langle 3,1\rangle$ и под u_1 имеется бесконечное множество атомов и безатомный элемент u_1''. Пусть $y_i = y_i' \vee y_i''$ и $y_1, \ldots, y_{r-1}$ такие, что $|y_i'| < \omega$, $i < r$ и $y_r, \ldots, y_t$ такие, что $|y_j'| = \omega$, $j \geq r$. Тогда пусть элементы $x_i' < u_1$, такие что $|x_i'| = |y_i'|$, $i < r$. Разобьем элемент u_1'' на элементы $x_1'', \ldots, x_{r-1}'', x_r, \ldots, x_{t-1}$ так, что $x_i'' = 0 \Leftrightarrow y_i'' = 0$, $i < r$. Определим $x_t = u_1 \setminus (\bigvee\limits_{i<r} x_i' \vee u_1'')$.

Таким образом, определены $x_1, \ldots, x_t$; элементы $x_{t+1}, \ldots, x_n$ определяются аналогично.

□

Лемма 5 *Если* $T(\bar{x}, \bar{y})$, *то* $T(x_i, y_i)$.

Доказательство. Пусть $x_i = \varkappa_i(\bar{p}_i)$, $\bar{p}_i = \left\langle p_1^i, \ldots, p_{k_i}^i \right\rangle$, $i = 1, \ldots, k$. Тогда $y_i = \varkappa_i(\bar{q}_i)$ и $g(\bar{p}_i) = \bar{q}_i$. Покажем, для определенности, что $T(x_1, y_1)$. Пусть $S = \bigcup\limits_{j=1}^{k} \bigcup\limits_{i=1}^{k_i} p_i^j = \{p_1, \ldots, p_s, c_1, \ldots, c_l\}$ и $p_1^1 = p_1$, $\ldots$, $p_{k_1}^1 = p_s$. Покажем, что существует изоморфизм $g_1 : \mathfrak{A}(\bar{a}, \bar{p}_1) \to \mathfrak{B}(\bar{b}, \bar{q}_1)$ и $g_1(\bar{p}_1) = \bar{q}_1$. Атомами алгебры $\mathfrak{A}(\bar{a}, \bar{p}, \bar{c})$ будут $x_{\bar{\varepsilon}\bar{\beta}\bar{\gamma}} = \bar{a}^{\bar{\varepsilon}} \wedge \bar{p}^{\bar{\beta}} \wedge \bar{c}^{\bar{\gamma}} \rightleftharpoons \bar{a}^{\bar{\varepsilon}} \bar{p}^{\bar{\beta}} \bar{c}^{\bar{\gamma}}$, где $\varepsilon_i, \beta_j, \gamma_r = 0, 1$. По определению $T(\bar{x}, \bar{y})$ имеем, что $g(x_{\bar{\varepsilon}\bar{\beta}\bar{\gamma}}) = \bar{b}^{\bar{\varepsilon}} \bar{q}^{\bar{\beta}} \bar{d}^{\bar{\gamma}}$, где $g(c_i) = d_i$. Атомами алгебры $\mathfrak{A}(\bar{a}, \bar{p}_1)$ будут $x_{\bar{\varepsilon}\bar{\beta}} = \bigcup\limits_{\bar{\gamma}} \bar{a}^{\bar{\varepsilon}} \bar{p}^{\bar{\beta}} \bar{c}^{\bar{\gamma}}$. Тогда $g(x_{\bar{\varepsilon}\bar{\beta}}) = \bigcup\limits_{\bar{\gamma}} \bar{b}^{\bar{\varepsilon}} \bar{q}^{\bar{\beta}} \bar{d}^{\bar{\gamma}} \rightleftharpoons y_{\bar{\varepsilon}\bar{\beta}}$. Легко заметить, что элементы $y_{\bar{\varepsilon}\bar{\beta}}$ являются атомами алгебры $\mathfrak{B}(\bar{b}, \bar{q}_1)$. Элемент $p_i = \bigcup\limits_{\bar{\varepsilon}\bar{\beta}} \{x_{\bar{\varepsilon}\bar{\beta}} \mid \beta_i = 1\}$. По определению отображения g имеем $g(p_i^1) = g(p_i) = \bigcup\limits_{\bar{\varepsilon}\bar{\beta}} \{y_{\bar{\varepsilon}\bar{\beta}} \mid \beta_i = 1\} = q_i = q_i^1$. Следовательно, $g(\bar{p}_1) = \bar{q}_1$. Легко проверить, что $|x_{\bar{\varepsilon}\bar{\beta}}| = |y_{\bar{\varepsilon}\bar{\beta}}|$. Тогда $g_1 \rightleftharpoons g \restriction \mathfrak{A}(\bar{a}, \bar{p}_1)$ является искомым. Пусть частичный изоморфизм

$g_1^* : HF(\mathfrak{A}) \to HF(\mathfrak{B})$ продолжает g_1. Легко проверить, что g_1^* удовлетворяет всем условиям определения $T(x_1, y_1)$. Аналогично верно $T(x_i, y_i)$.

□

Из определения соответствия T и следствия 4 следует

Лемма 6 *Если* $T(x, y)$, *то* $\langle HF(\mathfrak{A}), \bar{a}, x\rangle \equiv_1 \left\langle HF(\mathfrak{B}), \bar{b}, y\right\rangle$.

В дальнейшем рассматриваются последовательности вида $\bar{x} = \langle x_1, \ldots, x_t\rangle$, $\bar{y} = \langle y_1, \ldots, y_t\rangle$, $x_i, y_i \in \mathfrak{A}$ такие, что $x_i \wedge x_j = y_i \wedge y_j = o$, $i \neq j$, $\vee x_i = \vee y_i$ и $|x_i| = |y_i|$.

Последовательности $\bar{x}$ и $\bar{y}$ назовем 1-равными и будем писать $\bar{x} \simeq \bar{y}$, если

$$|x_i \wedge y_j| = |x_j \wedge y_i|.$$

Последовательности $\bar{x}$ и $\bar{y}$ назовем эквивалентными и будем писать $\bar{x} \sim \bar{y}$, если существуют такие последовательности $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ такие, что $\bar{x}_1 = \bar{x}$, $\bar{x}_n = \bar{y}$ и

$$\bar{x}_1 \simeq \bar{x}_2 \simeq \ldots \simeq \bar{x}_n.$$

Лемма 7 *Пусть* $c_i \leq x_i$, $c_j \leq x_j$ *и* $|c_i| = |c_j|$. *Пусть последовательность* $\bar{z}$ *получена из* $\bar{x}$ *заменой* x_i *на* $(x_i \setminus c_i) \vee c_j$, *а* x_j *на* $(x_j \setminus c_j) \vee c_i$. *Тогда* $\bar{x} \sim \bar{z}$.

Последовательность $\bar{z}$ из леммы 7 обозначим через $[\bar{x}]^{c_i}_{c_j}$.

Лемма 8 *Пусть* $c_i \leq x_i$ *такой, что* $|x_i \setminus c_i| = |x_j| = \omega$. *Последовательность* $\bar{z}$ *получена из* $\bar{x}$ *заменой* x_i *на* $x_i \setminus c_i$, *а* x_j *на* $x_j \vee c_i$. *Тогда* $\bar{x} \sim \bar{z}$.

Последовательность $\bar{z}$ из леммы 8 обозначим через $[\bar{x}]^{c_i}_{j}$.

Лемма 9 *Пусть даны последовательность* $\bar{x}$ *и* $\bar{y}$ *и* $|x_1|, \ldots, |x_k| < \omega$. *Тогда существуют последовательности* $\bar{u}$ *и* $\bar{z}$ *такие, что* $\bar{x} \sim \bar{u}$, $\bar{y} \sim \bar{z}$ *и* $u_1 = z_1, \ldots, u_k = z_k$.

Лемма 10 *Пусть* $T(x, y)$, $T(y, z)$ *и* $\varphi(x)$. *Тогда* $\psi_0(x, y)$.

Доказательство. Пусть $T(x,y)$ и $T(y,z)$. Пусть $u_1,\dots,u_p$, $\varkappa(\bar{p})$, $x_1,\dots,x_t$ такие же как в определении $T(x,z)$. Тогда существует такая последовательность $\bar{q}$, что $y=\varkappa(\bar{q})$ и атомы $y_1,\dots,y_n$ алгебры $\mathfrak{A}(\bar{a},\bar{q})$, что существует изоморфизм $h:\mathfrak{A}(\bar{a},\bar{p})\to\mathfrak{A}(\bar{a},\bar{q})$, $h(u_i)=u_i$. Будем предполагать, что $h(x_i)=y_i$ и $|x_i|=|y_i|$. Пусть e – фиксированное число, $1\le e\le p$ и $\bar{x}^e=\left\langle x^e_1,\dots,x^e_{t_e}\right\rangle$, $\bar{y}^e=\left\langle y^e_1,\dots,y^e_{t_e}\right\rangle$ атомы булевых алгебр $\mathfrak{A}(\bar{a},\bar{p})$, $\mathfrak{A}(\bar{a},\bar{q})$ лежащие под u_e. Покажем, что для каждого e выполнено $\bar{x}^e\sim\bar{y}^e$.

В дальнейшем индекс e будем опускать и t_e обозначим через n.

По лемме 9 можно считать, что если $|x_i|<\omega$, то $x_i=y_i$. Поэтому можно считать, что для любого i верно $|x_i|=\omega$. Допустим,что последовательность $\bar{x}$ не 1-равна $\bar{y}$. Предполагаем, что множество пар чисел упорядочено лексикографический. Положим $c_{ij}=x_i\wedge y_j$, $1\le i,j\le n$. Пусть $\langle i,j\rangle$ минимальная пара такая, что $|c_{ij}|>|c_{ji}|$ и $i<j$. Тогда $|c_{ji}|<\omega$. Так как $|y_i|=|x_i|=\omega$, то существует такое $s\in\omega$, что $|c_{si}|=\omega$.

Рассмотрим возможные случаи:

I. $s<j$.

Тогда $|c_{is}|=|c_{si}|=\omega$. Рассмотрим последовательность $\bar{x}_1=[\bar{x}]^{c_{ij}}_j$. Так как $c_{is}\le x_i\setminus c_{ij}$, то $|x_i\setminus c_{ij}|=\omega$. По лемме 8 имеем $\bar{x}_1\sim\bar{x}$. Пусть $\bar{x}_1=\langle x^1_1,\dots,x^1_n\rangle$. Теперь рассмотрим последовательность $\bar{x}_2=[\bar{x}_1]^{x^1_j\wedge y_i}_i$. Так как $x^1_j\wedge y_i=[x_j\vee c_{ij}]\wedge y_i=c_{ji}$, то $|x^1_j\wedge y_i|<\omega$. Отсюда по лемме 8 имеем $\bar{x}_1\sim\bar{x}_2$. Легко заметить, что для последовательностей $\bar{x}_2$, $\bar{y}$ пара $\langle i,j\rangle$ не минимальна и $|x^2_m|=|y_m|$ для любого $1\le m\le n$.

II. $s>j$.

Здесь рассмотрим возможные случаи:

IIa) $|c_{ij}|=\omega$

Пусть $\bar{x}_1=[\bar{x}]^{c_{ji}}_s$. Так как $|c_{ji}|<\omega$, то по лемме 8 имеем $\bar{x}\sim\bar{x}_1$. Рассмотрим элемент $\bar{x}_2=[\bar{x}_1]^{x^1_i\wedge y_i}_{x^1_i\wedge y_j}$. Так как $|c_{ji}\vee c_{si}|=|c_{ij}|=\omega$, то по лемме 7 $\bar{x}_1\sim\bar{x}_2$. Снова пара $\langle i,j\rangle$ не является минимальной для последовательностей $\bar{x}_2$,$\bar{y}$ и $|x^2_m|=|y_m|$ для любого $1\le m\le n$.

IIb) $|c_{ij}|=k>|c_{ji}|$

Тогда существует элемент $c\le c_{ij}$ такой, что $|c_{ij}\setminus c|=|c_{ji}|$. Рассмотрим $\bar{x}_1=[\bar{x}]^c_j$. По лемме 8 имеем $\bar{x}\sim\bar{x}_1$. Легко проверить, что пара $\langle i,j\rangle$ не является минимальной для последовательностей $\bar{x}_1$ и $\bar{y}$ и $|x^1_m|=|y_m|$ для любого $1\le m\le n$. Продолжая это построение мы

получим последовательность

$$\bar{x} \simeq \bar{x}_1 \simeq \ldots \simeq \bar{x}_m = \bar{y}.$$

Аналогичные построения проводим для любого e, $1 \leq e \leq p$. Тогда получим последовательности

$$\bar{x}^e = \bar{x}_0^e \simeq \bar{x}_1^e \simeq \ldots \simeq \bar{x}_{m_e}^e = \bar{y}^e.$$

Пусть $m = max\{m_e | \ 1 \leq e \leq p\}$. Положим для каждого e и i, $m_e \leq i \leq p$, $\bar{x}_i^e = \bar{y}^e$. Тогда получим последовательности

$$\bar{x}^e = \bar{x}_0^e \simeq \bar{x}_1^e \simeq \ldots \simeq \bar{x}_m^e = \bar{y}^e.$$

Рассмотрим последовательности

$$\bar{x} = \langle \bar{x}_0^e \mid 1 \leq e \leq p \rangle, \bar{x}_1 = \langle \bar{x}_1^e \mid 1 \leq e \leq p \rangle, \ldots,$$

$$\bar{x}_m = \langle \bar{x}_m^e \mid 1 \leq e \leq p \rangle = \bar{y}.$$

Из построения имеем, что

$$\bar{x} = \bar{x}_0 \simeq \bar{x}_1 \simeq \ldots \simeq \bar{x}_m = \bar{y}.$$

Пусть элементы $x_1, \ldots, x_{m-1} \in HF(\mathfrak{B})$ получены из элементов $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{m-1}$ также как, элемент x из элементов $\bar{x}$. Тогда из следствия 4 имеем

$$\langle HF(\mathfrak{B}), \bar{a}, x_i, x_{i+1} \rangle \equiv_1 \langle HF(\mathfrak{B}), \bar{a}, x_{i+1}, x_i \rangle.$$

Отсюда и из условий на модель $\mathfrak{N}$ имеем $\psi_0(x_i, x_{i+1})$. Так как ψ_0 определяет конгруэнтность на модели $\mathfrak{N}$, то $\psi_0(x, y)$. Лемма доказана.

□

Из лемм С, 3-6 и 10 следует теорема.

□

Следствие 5 *Если L – линейный порядок Σ-определимый в $HF(\mathfrak{A})$ над счетной булевой алгеброй $\mathfrak{A}$, то L – конструктивизируем.*

Литература

1. Ю.Л. Ершов, *Определимость и вычислимость*, Новосибирск: научная книга, 1996, 286 с. (Сибирская школа алгебры и логики).

2. С.С. Гончаров, Ю.Л. Ершов, *Конструктивные модели*, Новосибирск: научная книга, 1999, 345 с. (Сибирская школа алгебры и логики).

3. С.С. Гончаров, *Счетные булевы алгебры и разрешимость*, Новосибирск: научная книга, 1996, 364 с. (Сибирская школа алгебры и логики).

4. Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, Т.1: Москва: Мир, 1974, 335 с.

5. Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, Т.2 : Москва: Мир, 1977 414 с.

6. L.J. Richter *Degrees of structures*, The Journal of Symbolic Logic, 1981, V.46, № 4, с. 723 – 731.

7. А.В. Ромина *Определимость булевых алгебр в HF-надстройках* , Алгебра и логика 2000, т. 39, № 6 с. 711 – 720.

8. А.Н. Хисамиев, *О внутренней перечислимости линейных порядков*, Алгебра и логика, 2000, т. 39, № 6, с. 741 – 751.

О пополнении арифметических нумераций

З.Г. Хисамиев
Казахский национальный университет им. Аль-Фараби

Аннотация

Изучается операция пополнения нумераций. В работе Бадаева-Гончарова-Сорби эта операция используется при изучении полурешетки Роджерса Σ^0_n -вычислимых нумераций семейств арифметических множеств и стаявится вопрос: останется ли особый элемент любого пополнения особым при повторном пополнении относительно другого элемента. Здесь приводится решение этого вопроса. Далее, рассматривается вопрос о распределении особых и неособых элементов полной арифметической нумерации.

1 Основные определения

Пусть $\mathcal{A}$ – семейство Σ^0_n-множеств, $\alpha : N \to \mathcal{A}$ – Σ^0_n -вычислимая нумерация семейства $\mathcal{A}$ т.е. такая, что отношение $x \in \alpha(y)$ является Σ^0_n предикатом. Множество всех Σ^0_n-нумераций семейства $\mathcal{A}$, следуя [1], обозначаем $Com^0_n(\mathcal{A})$. В [1] изучается полурешетка Роджерса Σ^0_{n+1}-вычислимых нумераций семейства $\mathcal{A}$ Σ^0_{n+1}-множеств т.е. полурешетка нумераций $\langle Com^0_{n+1}(\mathcal{A})/_{\equiv}; \leqslant\rangle$. где $\equiv$ - отношение m-эквивалентности, а $\leqslant$ - отношение сводимости нумераций. Также релятивизованная полурешетка $\langle Com^0_{n+1}(\mathcal{A})/\ \equiv_{\mathbf{X}}, \leqslant_{\mathbf{X}}\rangle$, где в отношениях $\equiv_{\mathbf{X}}, \leqslant_{\mathbf{X}}$ вместо эквивалентности и сводимости вычислимыми функциями рассматриваются сводимости X-вычислимыми функциями Полезным инструментом изучения таких полурешеток оказалась операция пополнения (без оракула) и $\mathbf{X}$-пополненения, введенная Ершовым [3]. Так, операция пополнения позволяет получать новые элементы в полурешетке Роджерса, лежащие "выше" тех элементов, к которым применяется пополнение. В работе [1] ставится вопрос (вопрос 2): останется ли особый элемент особым, если нумерацию пополнить еще раз

но относительно другого элемента? Здесь дается ответ на этот вопрос. Далее, операция $\mathbf{0}'$-пополнения дает нумерацию в которой каждый элемент является особым при этом пополнение может перестать быть Σ^0_n-вычислимым ($n = 2$). В [2] приводятся примеры нумераций с конечным числом элементов, каждый из которых особый. Произведения таких нумераций и нумераций с одним особым элементом дают нумерации с конечным числом особых и произвольным числом неособых элементов. В [4], а также в [3] приводятся нумерации с бесконечным числом особых объектов. Из [4] теорема 2 можно извлечь нумерацию с бесконечным числом особых и бесконечным числом неособых элементов. Остается случай бесконечного числа особых и конечного числа неособых элементов. В настоящей работе, используя в качестве инструмента, операцию пополнения делается следующее. По любым двум Σ^0_{n+2}-нумерованным семействам $(\mathcal{A}, \alpha), (\mathcal{B}, \beta)$ т.е. таким, что $\alpha \in Com^0_{n+2}(\mathcal{A}), \quad \beta \in Com^0_{n+2}(\mathcal{B})$, строится нумерованное семейство $(\mathcal{C}, \gamma), \mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \{\emptyset\}, \gamma \in Com^0_{n+2}(\mathcal{C})$ такое, что: $(\mathcal{A}, \alpha)$ и $(\mathcal{B}, \beta)$ подобъекты $(\mathcal{C}, \gamma)$; каждый элемент $\mathcal{A} \cup \{\emptyset\}$, является особым относительно γ; если $\mathcal{A} \cup \{\emptyset\} \setminus \mathcal{B} \neq \emptyset$, то каждый элемент из $\mathcal{B}$ не является особым относительно γ.

Необходимые определения.

Мы придерживаемся определений из [1]. Пусть $K_{n+1}(x_0, x_1, ..., x_n)$ – универсальная клиниевская функция для n-местных частично-вычислимых функций, $K(x) \leftrightharpoons K_2(< x >_1, < x >_2)$ - универсальная одноместная частично-вычислимая функция, $< x >_i$ - левая и правая функции, $i = 1, 2$. Соответственно через $K^{\mathbf{X}}_{n+1}(x_0, x_1, ..., x_n)$ и $K^{\mathbf{X}}(x)$ обозначаются релятивизованные универсальные функции. Пусть $\mathbf{X} = deg_T(X) = \{Y | Y \equiv_T X\}$, здесь $\equiv_T$ - эквивалентность по Тьюрингу, $\mathbf{0} \leftrightharpoons deg(\emptyset), \mathbf{0^n} \leftrightharpoons deg(\emptyset^n)$. Пусть $\mathcal{A}$ – Σ^0_n-семейство, $\alpha \in Com^0_n(\mathcal{A})$, $A \in \mathcal{A}$.

Определение. [3]. Пополнением ($\mathbf{X}$-пополнением) нумерации α, относительно элемента A называется нумерация $\alpha_A \quad (\alpha^{\mathbf{X}}_A)$ определенная следующим образом

$$\alpha_A(x) \leftrightharpoons \begin{cases} \alpha(K(x)) & \text{если} \quad K(x)\downarrow, \\ A & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пополнение с оракулом $\mathbf{X}$ или $\mathbf{X}$-пополнение получается заменой в определении функции K на функцию $K^{\mathbf{X}}$.

Следующие три свойства хорошо известны, и часто будут исполь-

зоваться в дальнейшем.

1. α полна относительно A тогда и только тогда, когда $\alpha \equiv \alpha_A$.

2. Если α полна, то для всякой вычислимой функции g нумерация α имеет неподвижную точку, т.е. существует $x \in N$, что $\alpha(x) = \alpha(g(x))$.

3. Если $\alpha \equiv \beta$ и α полна относительно A, то β полна относительно A.

Также верны релятивизованные аналоги этих свойств. Вместо полноты, пополнения рассматривается **X**-полнота и **X**-пополнение, а вместо сводимости **X**-сводимость.

2 Повторные пополнения

В [1] сформулирована следущая проблема. Пусть $\alpha : N \to \mathcal{A}$. Верно ли, что $((\alpha_A^{0^n})_B^{0^n})_A^{0^n} \equiv (\alpha_A^{0^n})_B^{0^n}$? В частности, верно ли, что $((\alpha_A)_B)_A \equiv (\alpha_A)_B$?

Теорема 5 *Для любого n, существуют Σ^0_{n+2}-вычислимое семейство $\mathcal{A}$, содержащее по крайней мере два различных элемента A, B и нумерация $\alpha \in Com^0_{n+2}(\mathcal{A})$ такие, что $((\alpha_A^{0^n})_B^{0^n})_A^{0^n} \not\equiv (\alpha_A^{0^n})_B^{0^n}$. Нумерацию α можно выбрать как $\mathbf{0}^n$-полной относительно A, так и, $\mathbf{0}^n$-неполной относительно A.*

Доказательство. 1) Пусть $\mathcal{B}$ – произвольное Σ^0_{n+2}-вычислимое семейство, отличное от класса Σ^0_{n+2}. Пусть $A \in \Sigma^0_{n+2}$, $A \notin \mathcal{B}$ и пусть β – произвольная нумерация из $Com^0_{n+2}(\mathcal{B})$ Рассмотрим внешнее $\mathbf{0^n}$-пополнение нумерации β

$$\beta_A^{0^n}(x) \leftrightharpoons \begin{cases} \beta(K^{0^n}(x)) & \text{если} \quad K^{0^n}(x)\downarrow, \\ A & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Внешнее $\mathbf{0^n}$-пополнение также $\mathbf{0^n}$-полная нумерация относительно A и является Σ^0_{n+2}-вычислимой нумерацией семейства $\mathcal{A} \leftrightharpoons \mathcal{B} \cup \{A\}$. По свойству 1 $(\beta_A^{0^n})_A^{0^n} \equiv_{0^n} \beta_A^{0^n}$ Обозначим $\alpha \leftrightharpoons \beta_A^{0^n}$. Допустим противное. Тогда по свойству 3 $(\beta_A^{0^n})_B^{0^n}$ является $\mathbf{0}^n$-полной нумерацией семейства $\mathcal{A}$ относительно элементов A, B . Так как $\alpha \equiv_{0^n} \alpha_A^{0^n}$, то $\alpha_B^{0^n}$ $\mathbf{0}^n$ -полна относительно элементов A, B.

Определим вложенную **X**-вычислимую последовательность **X**-вычислимо-перечислимых множеств $U_n^{\mathbf{X}}$, $n \in N$.

$U_0^{\mathbf{X}} \leftrightharpoons N$, $U_{n+1}^{\mathbf{X}} \leftrightharpoons \{K^{\mathbf{X}}\}^{-1}(U_n^{\mathbf{X}})$, .

Номера элементов из $\mathcal{A}$ распределены в нумерации $\alpha_B^{0^n}$ следующим образом

$$\alpha_B^{0^n}(x) = \begin{cases} \beta(K^{0^n}(x)) & \text{если} \quad x \in U_2^{0^n}, \\ A & \text{если} \quad x \in U_1^{0^n} \setminus U_2^{0^n}, \\ B & \text{если} \quad x \in U_0^{0^n} \setminus U_1^{0^n}. \end{cases}$$

Определим $\mathbf{0}^n$-частично-вычислимую функцию φ_1. Пусть $e \in U_1^{0^n} \setminus U_2^{0^n}$

$$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \begin{cases} e & \text{если} \quad x \in U_2^{0^n}, \\ \uparrow & \text{если} \quad x \notin U_2^{0^n}. \end{cases}$$

Пусть f_1 — $\mathbf{0}^n$-вычислимая функция, продолжающая φ_1, относительно нумерации $\alpha_B^{0^n}$ с особым элементом B, тогда

$$\alpha_B^{0^n}(f_1(x)) = \begin{cases} A & \text{если} \quad x \in U_2^{0^n}, \\ B & \text{если} \quad x \notin U_2^{0^n}. \end{cases}$$

Положим $\varphi_2 \leftrightharpoons f_1 \upharpoonright U_1^{0^n}$. Тогда φ_2 — $\mathbf{0}^n$-частично-вычислимая функция. Далее, пусть f_2 — $\mathbf{0}^n$ -вычислимая функция, продолжающая φ_2, относительно $\alpha_B^{0^n}$ с особобым элементом A. Тогда для любого x

$$\alpha_B^{0^n}(f_2(x)) = \begin{cases} A & \text{если} \quad x \in U_2^{0^n}, \\ B & \text{если} \quad x \in U_1^{0^n} \setminus U_2^{0^n}, \\ A & \text{если} \quad x \in U_0^{0^n} \setminus U_1^{0^n}. \end{cases}$$

Следовательно f_2 не имеет неподвижных точек относительно $\alpha_B^{0^n}$. Противоречие. В построенном примере нумерация α $\mathbf{0}^n$- полна относительно A. 2) Укажем теперь как построить Σ^0_{n+2}-вычислимую нумерацию α с неособыми элементами A, B такую,что $((\alpha_A^{0^n})_B^{0^n})_A^{0^n} \not\equiv (\alpha_A^{0^n})_B^{0^n}$. Пусть $(\mathcal{B}, \beta), (\mathcal{C}, \gamma)$ — Σ^0_{n+2}-нумерованные семейства такие,что $A \notin \mathcal{C}, B \notin \mathcal{B}$. Положим $\alpha \leftrightharpoons \beta \oplus \gamma$. Ни один из элементов A, B не является особым относительно α, так как их номера рекурсивно отделимы.Если бы имела место эквивалентность $((\alpha_A^{0^n})_B^{0^n})_A^{0^n} \not\equiv (\alpha_A^{0^n})_B^{0^n}$. тогда, бы нумерация $(\alpha_A^{0^n})_B^{0^n}$ бы полна относительно элементов A и B. Построим построим $\mathbf{0^n}$-вычислимую функцию, не имещющую неподвижных точек относительно нумерации $(\alpha_A^{0^n})_B^{0^n}$. Зафиксируем e такое,

что $(\alpha_A^{0^n})_B^{0^n}(e) = A$ и для каждого $x \in N$ определим

$$\varphi_3(x) \leftrightharpoons \begin{cases} e & \text{если} \quad K^{0^n}(K^{0^n}(x)) - \text{нечетно}, \\ \uparrow & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Так как $(\alpha_A^{0^n})_B^{0^n}$ $\mathbf{0}^n$-полна относительно B, тогда φ_3 можно продолжить до $\mathbf{0}^n$-частично-вычислимой функции φ_4 с областью определения $U_1^{0^n}$, затем эту функцию продолжить до $\mathbf{0}^n$-вычислимой функции f_3. Распределение номеров этой функции таково, что она не имеет неподвижных точек.

3 Распределение особых и неособых элементов

Теорема 6 . *Пусть $(\mathcal{A}, \alpha), (\mathcal{B}, \beta)$ – произвольные Σ^0_{n+2}-нумерованные семейства. Тогда существует Σ^0_{n+2}-нумерация ν семейства $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \{\emptyset\}$ такая, что*

1. $\alpha \oplus \beta \leq \nu$.

2. ν полна относительно любого элемента из $\mathcal{A} \cup \{\emptyset\}$.

3. Если $\mathcal{A} \cup \{\emptyset\} \setminus \mathcal{B} \neq \emptyset$, то любой элемент из $\mathcal{B} \setminus \mathcal{A} \cup \{\emptyset\}$ не является особым относительно ν.

Доказательство. Рассмотрим следующие последовательности вычислимо-перечислимых множеств.

$U_0 \leftrightharpoons N, \quad U_{n+1} \leftrightharpoons K^{-1}(U_n)$.

$E_0 \leftrightharpoons \{x | K(x) = x\}, E_{n+1} \leftrightharpoons K^{-1}(E_n)$.

Пусть C – вычислимое бесконечное подмножество номеров тождественных функций $C \leftrightharpoons \{c_i | i \in N, K(< c_i, x >) = x + i * 0, x \in N\}$, а $E_0 = \{e_i | i \in N\}$ – какое-нибудь перечисление E_0. Пусть $(\mathcal{A}, \alpha), (\mathcal{B}, \beta)$ – Σ^0_{n+2}-нумерованные семейства. Определим нумерацию ν семейства $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \{\emptyset\}$ следующим образом,

$$\nu(z) \leftrightharpoons \begin{cases} \alpha(0) & \text{если} \quad z \in \bigcup (U_i \setminus U_{i+1}) \& \langle z \rangle_1 \notin C, \\ \alpha(i) & \text{если} \quad z \in U_1 \setminus U_2 \& \langle z \rangle_1 = c_i, \\ \beta(0) & \text{если} \quad z \in \bigcup E_{i+1} \& \langle z \rangle_1 \notin C, \\ \beta(i) & \text{если} \quad z = e_i, \\ \nu(K(\langle z \rangle_2)) & \text{если} \quad z \in \bigcup\limits_{i \neq 1} (U_i \setminus U_{i+1}) \cup \bigcup E_{i+1} \& \langle z \rangle_1 \in C, \\ \emptyset & \text{в противном случае} \quad . \end{cases}$$

Нумерация ν определяется разбором случаев, поэтому достаточно доказать что каждая альтернатива выражается Σ^0_{n+2}-предикатом. Остановимся на предпоследнем случае, остальные более очевидны. Требуется доказать, что в этом случае $y \in \nu(z)$ выражается Σ^0_{n+2}-предикатом.

$y \in \nu(z) \leftrightarrow z \in \bigcup\limits_{i\neq 1}(U_i \setminus U_{i+1}) \cup \bigcup\limits_{i\neq 0} E_i \& \langle z\rangle_1 \in C \& y \in \nu(K(z)) \leftrightarrow$
$\exists c_{i_0}...c_{i_{k-1}} \in C \quad \exists z_0...z_k \quad \exists j[z = z_0 = \langle c_{i_0}, z_{i_0}\rangle \& z_1 = K(z_{i_0}), ..., z_{k-1} = \langle c_{i_{k-1}}, z_{i_{k-1}}\rangle \& z_k = K(z_{i_{k-1}}) \& \{(\langle z_k\rangle_1 = c_j \& z_k \in U_1 \setminus U_2 \& y \in \alpha(j)) \vee$
$\exists n \neq 1(z_k \in U_n \setminus U_{n+1} \& \langle z_k\rangle_1 \notin C \& y \in \alpha(0)) \vee (z_k = e_j \& y \in \beta(j)) \vee$
$\exists n(z_k \in E_{n+1} \setminus E_n \& \langle z_k\rangle_1 \notin C \& y \in \beta(0))\}]$.

Используя β-функцию Геделя, можно избавиться от переменного количества кванторов существования

$y \in \nu(z) \leftrightarrow \exists w \quad \exists k \quad \exists n \quad \exists i \quad \forall j \langle k[\beta(w,0) = z \& \langle\beta(w,j)\rangle_1 \in C \&$
$\beta(w, j+1) = K(\langle\beta(w,j)\rangle_2) \& \{(\langle\beta(w,k)\rangle_1 = c_i \& \beta(w,k) \in U_1 \setminus U_2 \& y \in$
$\alpha(i)) \vee (\langle\beta(w,k)\rangle_1 \notin C \& \beta(w,k) \in U_n \setminus U_{n+1} \& y \in \alpha(0)) \vee (\beta(w,k)\rangle =$
$e_i \& y \in \beta(i)) \vee (\langle\beta(w,k)\rangle_1 \notin C \& \beta(w,k) \in E_{n+1} \setminus E_n \& y \in \beta(0))\}]$.

Здесь каждая дизъюнкция – Σ^0_{n+2}-предикат.

1. Пусть e – номер нигде не определенной функции. Определим вычислимую функцию $f(z)$.

$$f(z) \leftrightharpoons \begin{cases} \langle c_x, e\rangle & \text{если}, z = 2x, \\ e_x & \text{если} z = 2x+1. \end{cases}$$

Имеем

$$\nu(f(2x)) = \nu(\langle c_x, e\rangle) = \alpha(x),$$
$$\nu(f(2x+1)) = \nu(e_x) = \beta(x).$$

Таким образом, $\alpha \oplus \beta \leqslant \nu$.

2. Положим $f(x) \leftrightharpoons \langle c_i, x\rangle$ и докажем, что $f \quad m$-сводит $\nu_{\alpha(i)}$ к ν.

Случай 1. $x \in U_0 \setminus U_1$. В этом случае

$\langle c_i, x\rangle \in U_1 \setminus U_2$, $\nu(f(x)) = \nu(\langle c_i, x\rangle) = \alpha(i)$ и $\nu_{\alpha(i)}(x) = \alpha(i)$.

Случай 2. $x \in \bigcup(U_{i+1} \setminus U_{i+2}) \cup \bigcup E_i$.

В этом случае $\langle c_i, x\rangle \in \bigcup(U_{i+2} \setminus U_{i+3}) \cup \bigcup E_{i+1}$, и $\nu(\langle c_i, x\rangle) = \nu(K(x)) = \nu_{\alpha(i)}(x)$.

Случай 3. $x \in I$, где $N \setminus I \leftrightharpoons \bigcup(U_i \setminus U_{i+1}) \cup \bigcup E_i$.

В этом случае $K(x), \langle c_i, x\rangle \in I$, т.е. $\nu(\langle c_i, x\rangle) = \nu(K(x)) = \nu_{\alpha(i)}(x) = \emptyset$.

3. Теперь докажем, что $\nu_\emptyset \leqslant \nu$. Построим вычислимую функцию f такую, что если $x \in U_0 \setminus U_1$, то $f(x) \in I$. Определим вначале

вычислимую функцию φ. Зафиксируем $c \in C$

$$\varphi(x,y,z) \leftrightharpoons \begin{cases} \langle c, \langle p(z,z,x), y+1\rangle\rangle & \text{если} \quad x \notin U_{1,y}, \\ K(x) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь $p(x,y,z) - s^4_3$-функция а $U_{1,y}$ – часть U_1 вычислинная за y шагов. Пусть a – номер $\varphi(x,y,z)$ т.е. $\varphi(x,y,z) = K(\langle p(a,z,x), y\rangle)$ Рассмотрим последовательности чисел: $p_0 \leftrightharpoons \langle p(a,a,x), 0\rangle, ..., p_y \leftrightharpoons \langle p(a,a,x), y\rangle, ...$ и $q_0 \leftrightharpoons \langle c, \langle p(a,a,x), 0\rangle\rangle, ..., q_y \leftrightharpoons \langle c, \langle p(a,a,x), y\rangle\rangle, ...$ Обе последовательности строго монотонны и не пересекаются. Монотонность очевидна. Допустим $p_i = q_j$,тогда $p(a,a,x) = c\&0 = \langle c, \langle c, 1\rangle\rangle$ – противоречие.

Лемма 11 . *Пусть* $x \notin U_{1,s-1}$, *тогда* $K^{2i+1}(q_0) = p_i, K^{2i+2}(q_0) = q_{i+1}$, $i < s$, *а* $K^{2s+1}(q_0) = p_s$, *и*

$$K^{2s+2}(q_0) = \begin{cases} q_{s+1} & \textit{если} \quad x \notin U_{1,s}\ , \\ K(x) & \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Где $K^i(x)$ – *итерация* $K(x)$.

Доказательство. Индукцией по i. Для $i = 0 \quad K(q_0) = p_0, K^2(q_0) = q_1$ по определению. Допустим утверждение верно для $i < s$, тогда $x \notin U_{1,i}, K^{2i+3}(q_0) = K(q_{i+1}) = p_{i+1}$ и

$$K^{2i+4}(q_0) = \begin{cases} q_{i+2} & \text{если} \quad i+1 < s \vee x \notin U_{1,s}, \\ K(x) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Лемма 12 *Если* $x \in U_0 \setminus U_1$, *то* $\nu(q_0) = \emptyset$.

Доказательство. Если $x \in U_0 \setminus U_1$, тогда для любого $s \quad \notin U_{1,s}$ и последовательные значения последовательных итерации вида $K^i(q_0)$ – попарно различные числа $p_0, q_1 ..., p_y, q_{i+1} ...$ Это значит, что $q_0 \in I$.

Лемма 13 *Если* $x \in U_1$, *то* $\nu(K(x)) = \nu(q_0)$.

Доказательство. Пусть $x \in U_{1,s} \setminus U_{1,s-1}$, тогда докажем, что $\nu(q_0) = \nu(K^{2(i+1)}(q_0), i \leq s$ индукцией по i. Пусть $i = 0$, тогда $\nu(q_0) = \nu(K(p_0)) \quad$ и $\quad \nu(K^2(q_0)) = \nu(K(p_0)) \quad$. Пусть утверждение верно для $i\langle s$, тогда $x \notin U_{1,i}$ и $\nu(q_0) = \nu(K^{2(i+1)}(q_(0)) = \nu(q_{i+1}) = \nu(K(p_{i+1})) = \nu(K^{2(i+2)}(q_0)$. При $i+1 = s$, имеем $K^{2(i+2)}(q_0) = K(x), \quad \nu(q_0) = \nu(K(x))$.

Теперь определим вычислимую функцию $f(x) \quad f(x) \leftrightharpoons q_0$. Из леммы 2,3 следует, что $f(x) \quad m$-сводит $\quad \nu_\emptyset$ к ν. $\quad \square$

Литература

[1] *S. Badaev, S. Goncharov, A. Sorbi, Completness and universality arifmetical numberings*, In: Computability and Models, - Kluwer academic publishers and Plenum, New York, 2002, pp. 45 – 78.

[2] *Ю.Л. Ершов*, Об одной иерархии множеств II, Алгебра и логика, 1968, т.2, N2, стр. 15 – 47.

[3] *Ю.Л. Ершов*, Теория нумераций, М.,Наука, 1977.

[4] *С.Д. Денисов, И.А. Лавров*, Полные нумерации с бесконечным числом особых объектов, Алгебра и логика, 1970, т.9, N5, стр. 503 – 509.

Contents