УДК 510.5

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЛАХЛАНОВСКОЙ ПОЛУРЕШЕТКИ

С. Ю. ПОДЗОРОВ*)

В 1972 году А. Лахлан [6] получил описание типов изоморфизма главных идеалов в полурешетке рекурсивно перечислимых m-степеней. Им было доказано, что полурешетка изоморфна главному идеалу рекурсивно перечислимых m-степеней тогда и только тогда, когда она представима в виде прямого предела последовательности конечных дистрибутивных решеток с определенными алгоритмическими свойствами. Впоследствии такие полурешетки получили название лахлановских.

Лахлановские полурешетки играют важную роль в теории нумераций. Легко доказать, что главных идеалы в полурешетках вычислимых нумераций конечных семейств, в полурешетках Σ^0_2-вычислимых нумераций конечных семейств, состоящих из попарно не сравнимых по включению множеств (см. [1]) и во многих других полурешетках есть в точности лахлановские полурешетки. В работе [7] доказано, что полурешетка является лахлановской тогда и только тогда, когда она изоморфна главному идеалу m-степеней, порожденному гиперпростым множеством. В той же работе показывается, что каждую лахлановскую полурешетку можно вложить как начальный сегмент и как интервал в произвольную полурешетку Роджерса Σ^0_n-вычислимых нумераций. В 1978 году С. Д. Денисов [3] ввел в рассмотрение универсальную лахлановскую полурешетку и с ее помощью доказал, что все полурешетки вычислимых нумераций конечных семейств высоты 2 с наименьшим по включению элементом изоморфны. Этот технически сложный результат стал важным этапов на пути к решению (так до сих пор и не решенной) проблемы изоморфизма полурешеток вычислимых нумераций конечных семейств (см. [4, 5]).

---

*)Работа выполнена при частичной поддержке программы "Университеты России"УР.04.01.013, гранта КЦФЕ PD02-1.1-475 и гранта INTAS 00-499.

Вместе с тем лахлановские полурешетки сами по себе до сих пор не были объектом исследования. Громоздкое определение лахлановской полурешетки, состоящее из нескольких пунктов, полезно для построения различных эффективных конструкций, подобных лахлановской конструкции с "башнями", однако лишено естественности и нуждается в доработке. Так, например, легко показать, что каждая лахлановская полурешетка есть дистрибутивная верхняя полурешетка с наибольшим и наименьшим элементами, имеющая Σ_3^0-представление. Вместе с тем несложно установить, что любая дистрибутивная решетка с наибольшим и наименьшим элементами, имеющая Σ_3^0-преставление, является лахлановской. В связи с этим возникает естественный вопрос: верно ли, что класс лахлановских полурешеток совпадает с классом Σ_3^0-полурешеток, имеющих наибольший и наименьший элементы? Ответ на этот вопрос автору неизвестен, однако гипотеза о том, что он положителен, звучит достаточно правдоподобно. В частности, из положительного ответа на этот вопрос следует, что в определении лахлановской полурешетки условие на вычислимость семейства функций, представляющих пересечения, можно опустить.

В настоящей работе автор доказывает, что условие на эффективность пересечений действительно может быть опущено. Результат доказан в релятивизованном варианте, для произвольной n-лахлановской полурешетки. В таком виде он может быть полезен при изучении полурешеток арифметических нумераций.

Перейдем непосредственно к изложению. Основные понятия, относящиеся к теории вычислимости, можно найти в [8], а к теории решеток — в [2]. Мы предполагаем, что читателю они известны.

Для предупорядоченного множества $\mathcal{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ ассоциированное с ним частично упорядоченное множество будем обозначать через $\widetilde{\mathcal{A}} = \langle \widetilde{A}, \leqslant \rangle$ (сохраняя одно и то же обозначение для предпорядка и ассоциированного с ним порядка), а элемент $\widetilde{A}$, содержащий $x \in A$ (класс эквивалентности) — через $[x]_{\mathcal{A}}$ (либо просто через $[x]$, если ясно, о каком $\mathcal{A}$ идет речь). Предупорядоченное множество $\mathcal{A}$ будем называть *предрешеткой*, (*верхней предполурешеткой, нижней предполурешеткой*), если $\widetilde{\mathcal{A}}$ является решеткой (верхней полурешеткой, нижней полурешеткой). Предрешетку (верхнюю предполурешетку) будем называть дистрибутивной, если ассоциированная с ней решетка (верхняя полурешетка) дистрибутивна. В дальнейшем верхние полурешетки (верхние предполурешетки) мы называем просто *полурешетками* (*предполурешетками*), поскольку нижние полурешетки мы рассматривать не будем. Для предрешетки (предполурешетки) $\mathcal{A}$ запись $\mathcal{A} = \langle A, \leqslant; u, v\rangle$ ($\mathcal{A} = \langle A, \leqslant; u\rangle$) будет означать, что u и v — бинарные операции на $\mathcal{A}$, представляющие на $\widetilde{\mathcal{A}}$ операции взятия точной верхней и точной нижней граней соответственно.

Полурешетку $\mathfrak{L}$ назовем *n-лахлановской*, если для некоторой предполурешетки $\mathcal{L} = \langle \mathbb{N}, \leqslant_\omega\rangle$ с носителем, равным множеству натуральных чисел, $\mathfrak{L} \cong \widetilde{\mathcal{L}}$ и существует последовательность конечных дистрибутивных предрешеток $\{\mathcal{D}_i = \langle D_i, \leqslant_i\rangle\}_{i\in\mathbb{N}}$, для которой выполнены следующие 7 условий:

1. D_i — конечные подмножества натурального ряда, сильно вычислимые равномерно по i;

2. для всех i $0, 1 \in D_i$, $0 <_i 1$, для всех $x \in D_i$ $0 \leqslant_i x \leqslant_i 1$;

3. Π^0_{n+2}-индексы отношений $\leqslant_i$ вычислимы равномерно по i;

4. для всех i $D_i \subseteq D_{i+1}$, для $x, y \in D_i$ из $x \leqslant_i y$ следует $x \leqslant_{i+1} y$, определенные естественным образом вложения $\widetilde{\mathcal{D}}_i$ в $\widetilde{\mathcal{D}}_{i+1}$ сохраняют точные верхние грани;

5. $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i = \mathbb{N}$, $x \leqslant_\omega y \Leftrightarrow \exists i(x \leqslant_i y)$;

6. существует последовательность функций $\{u_i : D_i^2 \to D_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, вычислимая равномерно по i, такая что $\mathcal{D}_i = \langle D_i, \leqslant_i; u_i\rangle$;

7. существует последовательность функций $\{v_i : D_i^2 \to D_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, вычислимая равномерно по i, такая что $\mathcal{D}_i = \langle D_i, \leqslant_i; u_i, v_i\rangle$.

Ясно, что каждая n-лахлановская полурешетка дистрибутивна, содержит наибольший и наименьший элементы (можно заметить, что она изоморфна прямому пределу $\widetilde{\mathcal{D}}_i$-ых, рассматриваемых как полурешетки). 0-лахлановскую полурешетку мы называем просто *лахлановской*.

Пусть $\mathcal{A} = \langle A, \leqslant; u\rangle$ — произвольная предполурешетка. *Молекулой* в $\mathcal{A}$ назовем произвольное $B \subseteq A$, для которого выполнены следующие 2 условия:

1. если $x \in B$, $y \in A$ и $x \leqslant y$, то $y \in B$;

2. если $u(x, y) \in B$, то $x \in B$ или $y \in B$.

Множество молекул в $\mathcal{A}$ обозначим через $\mathrm{Mol}(\mathcal{A})$.

Предложение 1 *Пусть* $\mathcal{A} = \langle A, \leqslant; u\rangle$ *— предполурешетка. Тогда* $\widetilde{\mathcal{A}}$ *изоморфна подполурешетке в* $\langle \mathcal{P}(\mathrm{Mol}(\mathcal{A})), \subseteq; \cup\rangle$*, причем изоморфизм задается правилом* $[x] \mapsto \{B \in \mathrm{Mol}(\mathcal{A}) : x \in B\}$.

Доказательство. Из определения молекулы очевидно, что данное отображение определено корректно и сохраняет верхние грани. Покажем, что оно инъективно. Пусть $x \nleqslant y$ и S — множество порядковых фильтров в $\mathcal{A}$, содержащих x и не содержащих y. По лемме Цорна в $\langle S, \subseteq\rangle$ найдется максимальный элемент M. Если M — не молекула, то для некоторых $a_1, a_2 \notin M$ имеем $a = u(a_1, a_2) \in M$. Так как $a \nleqslant y$, то для некоторого $i \in \{1, 2\}$ $a_i \nleqslant y$. Но тогда $M \cup \{z \in A : a_i \leqslant z\} \in S$. $\Box$

Предложение 2 *Пусть* $\mathcal{A}_1 = \langle A_1, \leqslant_1; u_1\rangle$ *и* $\mathcal{A}_2 = \langle A_2, \leqslant_2; u_2\rangle$ *— предполурешетки,* $A_1 \subseteq A_2$*, для всех* $x, y, z \in A_1$ $u_1(x, y) \equiv_1 z \Rightarrow u_2(x, y) \equiv_2 z$ *и* $B \subseteq A_2$ *— молекула в* $\mathcal{A}_2$*. Тогда* $B \cap A_1$ *— молекула в* $\mathcal{A}_1$.

Доказательство. Если $x \in B \cap A_1$, $y \in A_1$ и $x \leqslant_1 y$, то $y \equiv_1 u_1(x, y)$; значит, $x \leqslant_2 u_2(x, y) \equiv_2 y$ и $y \in B$. Аналогично, если для $x, y \in A_1$ $u_1(x, y) \in B$, то $u_2(x, y) \equiv_2 u_1(x, y)$, $u_2(x, y) \in B$ и $x \in B$ или $y \in B$. $\Box$

Атомом будем называть молекулу, содержащую наименьший элемент. Множество атомов конечной предполурешетки $\mathcal{A}$ обозначим через $\mathrm{Atom}(\mathcal{A})$.

Предложение 3 *В конечной дистрибутивной предполурешетке каждая молекула единственным образом представляется в виде объединения попарно несравнимых (по включению) атомов*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} = \langle A, \leqslant; u\rangle$ — конечная дистрибутивная предполурешетка, M — молекула в $\mathcal{A}$. Пусть $C(M)$ — семейство всех подмножеств M вида $\{x : b \leqslant x\}$, где $[b]$ — минимальный элемент в $\{[x] : x \in M\}$. Ясно, что различные элементы $C(M)$ попарно несравнимы и что объединение $C(M)$ равно M.

Пусть $B \in C(M)$: покажем, что B — атом. Ясно, что в B есть наименьший элемент и что для B выполняется условие 1 из определения молекулы. Пусть b — наименьший в B и $u(x, y) \in B$. По дистрибутивности найдутся $x_b \leqslant x$ и $y_b \leqslant y$, такие что $u(x_b, y_b) \equiv b$. Тогда один из элементов x_b, y_b лежит в M и, в силу того, что b — минимальный в M, эквивалентен b. Но тогда либо $b \leqslant x$, либо $b \leqslant y$.

Осталось доказать единственность. Пусть C' — некоторое семейство попарно несравнимых атомов, дающих в объединении M. Пусть $B \in C'$

и b' — наименьший в B', а B — элемент $C(M)$, содержащий b'. Пусть b — наименьший в B, а B'' — элемент C', содержащий b. Тогда $B' \subseteq B \subseteq B''$ и, в силу несравнимости элементов C', $B' = B \in C(M)$. Значит, $C' \subseteq C(M)$. Обратное включение доказывается аналогично. $\square$

Предложение 4 *Пусть $\mathcal{A} = \langle A, \leqslant; u, v \rangle$ — конечная дистрибутивная предрешетка. Тогда $\widetilde{\mathcal{A}}$ изоморфна подрешетке в $\langle \mathcal{P}(\mathrm{Atom}(\mathcal{A})), \subseteq; \cup, \cap \rangle$, причем изоморфизм задается правилом $[x] \mapsto \{B \in \mathrm{Atom}(\mathcal{A}) : x \in B\}$.*

Доказательство. Так как каждый атом является молекулой, то, по предложению 1, отображение определено корректно и сохраняет верхние грани. Чтобы доказать инъективность, рассмотрим $x \nleqslant y$ и молекулу M, такую что $x \in M$ и $y \notin M$; тогда, по предложению 3, существует атом, содержащий x и содержащийся в M.

Остается доказать, что это отображение сохраняет пересечения. Пусть для атома M $x \in M$ и $y \in M$. Так как M содержит наименьший элемент, то $v(x, y) \in M$. $\square$

Под *точечным n-рекурсивным оператором* мы будем понимать Σ^0_{n+1}-множество пар натуральных чисел. В этом случае для точечного n-рекурсивного оператора Ψ и $X \subseteq \mathbb{N}$ $\Psi(X) = \{y : x \in X \;\&\; \langle x, y \rangle \in \Psi\}$, причем если $X \in \Sigma^0_{n+1}$, то $\Psi(X) \in \Sigma^0_{n+1}$ и Σ^0_{n+1}-индекс $\Psi(X)$ вычисляется равномерно по Σ^0_{n+1}-индексам Ψ и X. Отметим еще одно важное для нас свойство таких операторов: для $X, Y \subseteq \mathbb{N}$ $\Psi(X \cup Y) = \Psi(X) \cup \Psi(Y)$. Точечный n-рекурсивный оператор Ψ мы называем *конечным*, если для каждого $x \in \mathbb{N}$ множество $\Psi(\{x\})$ конечно.

Теорема 1 *В определении n-лахлановской полурешетки условие 7 можно опустить.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{L} = \langle \mathbb{N}, \leqslant_\omega \rangle$ — предполурешетка, для которой выполняются условия 1 – 6 из определения лахлановской полурешетки. Зафиксируем последовательность $\mathcal{D}_i = \langle D_i, \leqslant_i; u_i \rangle$ из определения. Зафиксируем также функции v_i, представляющие пересечения на $\widetilde{\mathcal{D}}_i$ (последовательность $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ не обязана быть вычислимой). Для $B \subseteq D_i$ определим $v_i(B) \in D_i$: $v_i(\emptyset) = 1$, $v_i(\{x\}) = x$, $v_i(\{x < y\}) = v_i(x, y)$, $v_i(\{x_1 < \ldots x_k < y\}) = v_i(v_i(\{x_1, \ldots, x_k\}), y)$.

Построим последовательности Σ^0_{n+1}-множеств $\{V^i_x\}_{i \in \mathbb{N}, x \in D_i}$ и конечных точечных n-рекурсивных операторов $\{\Psi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, такие что Σ^0_{n+1}-индекс V^i_x

вычисляется равномерно по i и x, Σ^0_{n+1}-индекс Ψ_i вычисляется равномерно по i и выполняются следующие 5 свойств:

1. $x \leqslant_i y \Rightarrow V^i_x \subseteq V^i_y$;

2. $V^i_{u_i(x,y)} = V^i_x \cup V^i_y$;

3. для $x, y \in D_i$ если $x \nleqslant_i y$, то $V^i_x \setminus V^i_y$ бесконечно;

4. $(V^i_x \cap V^i_y) \setminus V^i_{v_i(x,y)}$ конечно;

5. $\Psi_i(V^i_x) = V^{i+1}_x$.

Пусть v — некоторая функция из $\mathcal{P}(D_i)$ в D_i. Π^0_{n+2}-индекс условия $(\forall B \subseteq D_i)(\forall x \in B)(v(B) \leqslant_i x)$ вычисляется равномерно по v и i. Значит, существует $\emptyset^{(n)}$-вычислимая неубывающая по t функция $r(i, v, t)$, которая неограниченно растет с ростом t тогда и только тогда, когда это условие выполнено. Пусть $r(i, v) = \lim_{t\to\infty} r(i, v, t)$.

Через $\mathfrak{T}$ обозначим множество всех конечных последовательностей вида $(v^k, \ldots, v^0)$, где для $i \leqslant k$ v^i — функция из $\mathcal{P}(D_i)$ в D_i. Для $\tau = (v^k, \ldots, v^0) \in \mathfrak{T}$ число k назовем *длиной* τ (обозначается $|\tau|$), а $\min\{r(i, v^i) : i \leqslant k\}$ — *рангом* τ. Зафиксируем $\emptyset^{(n)}$-вычислимую последовательность $\tau_0, \tau_1, \ldots$ элементов из $\mathfrak{T}$, такую что для каждого $m \in \mathbb{N}$ почти все элементы этой последовательности имеют ранг $> m$, а каждый элемент $\mathfrak{T}$ бесконечного ранга встречается бесконечно часто. Существование такой последовательности легко доказать методом конечного приоритета, перемежая в эффективной с оракулом $\emptyset^{(n)}$ конструкции требования вида "включить $\tau \in \mathfrak{T}$ в последовательность не менее m раз"с требованиями вида "не включать в последовательность элементы $\mathfrak{T}$ ранга $\leqslant m$". Будем также считать, что последовательность τ_i-ых обладает еще одним дополнительным свойством: если для $i \in \mathbb{N}$ $\tau_i = (v^{k+1}, \ldots, v^0)$, то для некоторого $j > i$ $\tau_j = (v^k, \ldots, v^0)$ (легко понять, как это можно сделать).

Для $B \subseteq D_i$ Σ^0_{n+2}-индекс условия "B — молекула в $\mathcal{D}_i$"вычисляется эффективно по B и i. Зафиксируем $\emptyset^{(n)}$-вычислимую неубывающую по t функцию $\mathrm{Mod}(i, B, t)$, такую что $\lim_{t\to\infty} \mathrm{Mod}(i, B, t) < \infty$ тогда и только тогда, когда это условие выполнено.

Каркасом будем называть пару $\mathcal{F} = (\mathcal{A}_k, \ldots, \mathcal{A}_0; c_k, \ldots, c_1)$, состоящую из двух конечных последовательностей, такую что:

F1) для $i \leqslant k$ элементами $\mathcal{A}_i$ являются непустые подмножества D_i;

F2) для $i < k$ $c_{i+1} : \mathcal{A}_{i+1} \to \mathcal{P}(\mathcal{A}_i)$ — отображение $\mathcal{A}_{i+1}$ в множество непустых подмножеств $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{A}_i = \bigcup_{A\in\mathcal{A}_{i+1}} c_{i+1}(A)$;

F3) для $i < k$ и $A \in \mathcal{A}_{i+1}$ элементы $c_{i+1}(A)$ попарно несравнимы и $A \cap D_i = \bigcup c_{i+1}(A)$;

F4) множество $\mathcal{A}_k$ одноэлементно.

Число k в этом определении называется *длиной* каркаса $\mathcal{F}$. *Модулем* каркаса $\mathcal{F}$ (на шаге t) назовем число $\mathrm{Mod}(\mathcal{F}, t) = \sum_{i\leqslant k, B\in\mathcal{A}_i} \mathrm{Mod}(i, B, t)$. Для $\tau = (v^k, \ldots, v^0) \in \mathfrak{T}$ будем говорить, что $\mathcal{F}$ *согласован* с τ, если $(\forall i \leqslant k)(\forall B \in \mathcal{A}_i)(v^i(B) \in B)$. Для $\tau \in \mathfrak{T}$ множество всех каркасов длины $|\tau|$, согласованных с τ, обозначим через $\mathrm{Cons}(\tau)$.

Пусть $\mathcal{F} = (\mathcal{A}_k, \ldots, \mathcal{A}_0; c_k, \ldots, c_1)$ — каркас, $m \leqslant k$ и $A \in \mathcal{A}_m$. Существует единственный каркас $(\mathcal{B}_m, \ldots, \mathcal{B}_0; d_m, \ldots, d_1)$ длины m, определяемый следующими соотношениями:

1. $\mathcal{B}_m = \{A\}$;
2. для $i < m$ $\mathcal{B}_i = \bigcup_{B\in\mathcal{B}_{i+1}} c_{i+1}(B)$;
3. для $i < m$ $d_{i+1} = c_{i+1} \restriction \mathcal{B}_{i+1}$.

Построенный таким образом каркас обозначим через $\mathcal{F}^m_A$. Для $m \leqslant k$ каркас $\mathcal{G}$ длины m назовем *подкаркасом* каркаса $\mathcal{F}$ (обозначается $\mathcal{G} \preccurlyeq \mathcal{F}$), если для некоторого $A \in \mathcal{A}_m$ $\mathcal{G} = \mathcal{F}^m_A$. Заметим, что если $\mathcal{G} \preccurlyeq \mathcal{F}$ и на некотором шаге модуль $\mathcal{G}$ растет, то модуль $\mathcal{F}$ на этом шаге также увеличивается.

Перейдем к описанию пошаговой конструкции. Предлагаемая конструкция эффективна с оракулом $\emptyset^{(n)}$. На каждом шаге мы будем выполнять следующие действия: ассоциировать пару $(i, \mathcal{F})$, где $i \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{F} \in \mathrm{Cons}(\tau_i)$, с неиспользованным ранее натуральным числом (после чего оно будет считаться использованным); отбраковывать ранее использованные натуральные числа; перечислять множества V^i_x; перечислять операторы Ψ_i. Если пара $(i, \mathcal{F})$ ассоциирована на шаге t с некоторым числом, то мы называем такую пару *использованной*. Натуральное число i мы называем *исчерпанным* на шаге t, если на этом шаге для всех $\mathcal{F} \in \mathrm{Cons}(\tau_i)$ пары $(i, \mathcal{F})$ уже использованы.

<u>Шаг t</u> разбивается на четыре этапа.

Этап 1. Для каждой использованной пары $(i, \mathcal{F})$, такой что модуль $\mathcal{F}$ увеличился по сравнению с предыдущим шагом, отбраковываем число, с которым ассоциирована эта пара.

Этап 2. Ищем наименьшее неисчерпанное i. Выбираем $\mathcal{F} \in \mathrm{Cons}(\tau_i)$, такой что пара $(i, \mathcal{F})$ еще не использована, берем наименьшее неиспользованное натуральное число и ассоциируем с ним пару $(i, \mathcal{F})$.

Этап 3. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ и $x \in D_i$ перечисляем в V^i_x числа z, такие что с z ассоциирована пара $(j, \mathcal{F})$, $|\tau_j| = i$ и либо z отбраковано, либо $\mathcal{F} = (\mathcal{A}_i, \ldots, \mathcal{A}_0; c_i, \ldots, c_1)$, $A \in \mathcal{A}_i$ и $x \in A$ для некоторого $A \subseteq D_i$.

Этап 4. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ перечислим в Ψ_k все такие пары $\langle x, y \rangle$, что перед выполнением этого этапа с x ассоциирована пара $(j, \mathcal{G})$ для $\mathcal{G} = (\mathcal{B}_k, \ldots, \mathcal{B}_0; d_k, \ldots, d_1)$, с y ассоциирована пара $(i, \mathcal{F})$ для $\mathcal{F} = (\mathcal{A}_{k+1}, \ldots, \mathcal{A}_0; c_{k+1}, \ldots, c_1)$, $i < j$ и либо y отбраковано, либо x не отбраковано и $\mathcal{G} \preccurlyeq \mathcal{F}$.

Покажем, что множества V^i_x удовлетворяют требуемым пяти свойствам.

1. Пусть $x \leqslant_i y$, z включается в V^i_x на шаге t, $\mathcal{F}$ и A — такие, как в описании этапа 3 шага t. Если z когда-либо будет отбраковано, то $z \in V^i_y$. Если же это не так, то модуль $\mathcal{F}$ после шага t не растет, A — молекула в D_i, $y \in A$ и опять $z \in V^i_y$.

2. То, что $V^i_x \cup V^i_y \subseteq V^i_{u_i(x,y)}$, следует из предыдущего. Пусть z включается в $V^i_{u_i(x,y)}$ на шаге t и опять $\mathcal{F}$ и A — такие, как в описании этапа 3 шага t. Если z когда-либо будет отбраковано, то $z \in V^i_x$. Если нет, то A — молекула в D_i, $x \in A$ или $y \in A$ и $z \in V^i_x \cup V^i_y$.

3. Пусть для $x, y \in D_k$ $x \not\leqslant_k y$. По предложению 4 найдется атом A в D_k, такой что $x \in A$ и $y \notin A$. Пусть $\tau = (v_k, \ldots, v_0)$: τ имеет бесконечный ранг и встречается в последовательности τ_i-ых бесконечно часто. По предложениям 2 и 3 существует каркас $\mathcal{F} = (\mathcal{A}_k, \ldots, \mathcal{A}_0; c_k, \ldots, c_1)$ с ограниченным модулем, такой что для $i \leqslant k$ все элементы $\mathcal{A}_i$ — атомы и $A \in \mathcal{A}_k$. Ясно, что $\mathcal{F} \in \mathrm{Cons}(\tau)$. Пусть после шага t модуль $\mathcal{F}$ не растет. Существует бесконечно много чисел, с которыми после шага t будет ассоциирована пара $(i, \mathcal{F})$ для $\tau_i = \tau$. Все они попадут в $V^k_x \setminus V^k_y$.

4. Пусть для $x, y \in D_k$ $z \in V^k_x \cap V^k_y$. Пусть с z по ходу конструкции ассоциируется пара $(i, \mathcal{F})$, $\mathcal{F} = (\mathcal{A}_k, \ldots, \mathcal{A}_0; c_k, \ldots, c_1)$ и $A \in \mathcal{A}_k$. Если z когда-либо отбраковывается, то $z \in V^k_{v_k(x,y)}$. Предположим, что z не отбраковывается: тогда $x \in A$ и $y \in A$. Поскольку модуль $\mathcal{F}$ ограничен, то A — молекула. Так как существует лишь конечное число элементов $\mathfrak{T}$ длины k, то с точностью до конечного числа чисел z можно считать, что τ_i имеет бесконечный ранг. Но тогда, поскольку $\mathcal{F}$ согласован с τ_i, A содержит наименьший элемент и является атомом. Значит, по предложению 4, $v_k(x,y) \in A$ и $z \in V^k_{v_k(x,y)}$ (почти для всех z).

5. Покажем, что для $x \in D_k$ $\Psi_k(V_x^k) \subseteq V_x^{k+1}$. Пусть $p \in V_x^k$ и $\langle p, q\rangle \in X_k$. Если q когда-либо становится отбракованным, то $q \in V_x^{k+1}$. Пусть это не так. Тогда на шаге, на котором пара $\langle p, q\rangle$ перечисляется в Ψ_k, с p ассоциирована пара $(j, \mathcal{G})$ для $\mathcal{G} = (\mathcal{B}_k, \ldots, \mathcal{B}_0; d_k, \ldots, d_1)$, а с q ассоциирована пара $(i, \mathcal{F})$ для $\mathcal{F} = (\mathcal{A}_{k+1}, \ldots, \mathcal{A}_0; c_{k+1}, \ldots, c_1)$ и $\mathcal{G} \preccurlyeq \mathcal{F}$. Если после этого шага модуль $\mathcal{G}$ вырастет, то модуль $\mathcal{F}$ также вырастет и q станет отбракованным. Значит, модули $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ ограничены. Но тогда для $B \in \mathcal{B}_k$ и $A \in \mathcal{A}_{k+1}$ B и A — молекулы, причем $B \subseteq A$. Число p никогда не становится отбракованным и, значит, $x \in B$. Следовательно, $x \in A$ и $q \in V_x^{k+1}$.

Покажем обратное включение. Пусть $q \in V_x^{k+1}$: тогда с q на некотором шаге ассоциируется пара $(i, \mathcal{F})$ для $\mathcal{F} = (\mathcal{A}_{k+1}, \ldots, \mathcal{A}_0; c_{k+1}, \ldots, c_1)$ и $\tau_i = (v^{k+1}, \ldots, v^0)$. Если q когда-либо отбраковывается, то рассмотрим произвольное достаточно большое $p \in V_x^k$: пара $\langle p, q\rangle$ будет перечислена в Ψ_k. Пусть q никогда не становится отбракованным. Тогда для $A \in \mathcal{A}_{k+1}$ A — молекула в D_{k+1} и $x \in A$. Из определения каркаса видно, что найдется $B \in \mathcal{A}_k$, такое что $x \in B$. Пусть $\mathcal{G} = \mathcal{F}_B^k$ и для $j > i$ $\tau_j = (v^k, \ldots, v^0)$. Так как $\mathcal{F} \in \mathrm{Cons}(\tau_i)$, то $\mathcal{G} \in \mathrm{Cons}(\tau_j)$ и пара $(j, \mathcal{G})$ будет использована, но после пары $(i, \mathcal{F})$. Значит, число p, с которым будет ассоциироваться пара $(j, \mathcal{G})$, никогда не станет отбракованным (иначе бы q тоже стало отбракованным). Но тогда $p \in V_x^k$ и $\langle p, q\rangle \in \Psi_k$.

Переходим к следующему этапу доказательства теоремы. Для произвольного множества D через $T(D)$ обозначим свободную дистрибутивную решетку с множеством образующих D. Элементы $T(D)$ мы интерпретируем как термы сигнатуры $\{\vee, \wedge\}$ от переменных из множества D, находящиеся в дизъюнктивной нормальной форме. Операции объединения и пересечения (которые мы обозначим также через $\vee$ и $\wedge$) задаются на $T(D)$ стандартным образом. Если множество D конечно, то $T(D)$ также конечна.

Пусть φ — произвольное отображение из D в $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, α — естественное вложение D в $T(D)$, сопоставляющее каждому элементу D соответствующий односимвольный терм. Через φ^* обозначим отображение $T(D)$ в $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, однозначно определяемое правилами: $\varphi^*(\alpha(x)) = \varphi(x)$, $\varphi^*(t_1 \vee t_2) = \varphi^*(t_1) \cup \varphi^*(t_2)$ и $\varphi^*(t_1 \wedge t_2) = \varphi^*(t_1) \cap \varphi^*(t_2)$. Пусть $\leqslant_\varphi$ — предпорядок на $T(D)$, такой что $t_1 \leqslant_\varphi t_2 \Leftrightarrow \varphi^*(t_1) \subseteq \varphi^*(t_2)$; тогда $\langle T(D), \leqslant_\varphi\rangle$ является дистрибутивной предрешеткой (ассоциированная с ней решетка изоморфна $\langle \varphi^*(T(D)), \subseteq; \cup, \cap\rangle$), причем $\vee$ и $\wedge$ представляют в этой предрешетке операции объединения и пересечения соответственно.

Через $\sqcup$ обозначим операцию дизъюнктного объединения множеств. Определим по индукции последовательности конечных дистрибутивных решеток $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} T_0 &= T(D_0),\\ T_{j+1} &= T(T_j \sqcup D_{j+1}); \end{aligned}$$

Через α_j и β_j обозначим естественные вложения $T_j \subseteq T_j \sqcup D_{j+1} \subseteq T_{j+1}$ множества T_j в T_{j+1} и $D_j \subseteq T_{j-1} \sqcup D_j \subseteq T_j$ ($D_0 \subseteq T_0$ для $j = 0$) множества D_j в T_j соответственно, сопоставляющие элементам T_j и D_j соответсвующие им односимвольные термы.

Определим по индукции последовательности множеств $\{X_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ и отображений $\{\psi_{i,0} : D_0 \to \mathcal{P}(\mathbb{N})\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\{\psi_{i,j+1} : T_j \sqcup D_{j+1} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})\}_{i,j\in\mathbb{N}}$, $\{\varphi_{i,j} : T_j \to \mathcal{P}(\mathbb{N})\}_{i,j\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} X_{i,0} &= \{a : a \leqslant i\},\\ X_{i,j+1} &= \Psi_j(X_{i,j}) \cup \{a : a \leqslant i\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{i,0}(x) &= V_x^0 \cup X_{i,0},\\ \varphi_{i,0} &= \psi_{i,0}^*,\\ \psi_{i,j+1}(x) &= \begin{cases} V_x^{j+1} \cup X_{i,j+1}, & x \in D_{j+1},\\ \Psi_j(\varphi_{i,j}(x)) \cup X_{i,j+1}, & x \in T_j, \end{cases}\\ \varphi_{i,j+1} &= \psi_{i,j+1}^*. \end{aligned}$$

Множества $X_{i,j}$ конечны и образуют $\emptyset^{(n)}$-вычислимую (но не обязательно сильно $\emptyset^{(n)}$-вычислимую) последовательность, причем для любых $i, j \in \mathbb{N}$ $[0, \ldots, i] \subseteq X_{i,j} \subseteq X_{i+1,j}$ (второе включение легко доказать индукцией по j). Введем в рассмотрение дистрибутивные предрешетки $\mathcal{T}_{i,j} = \langle T_j, \leqslant^{i,j} ; \vee_j, \wedge_j\rangle$, где для $t_1, t_2 \in T_j$ $t_1 \leqslant^{i,j} t_2 \Leftrightarrow \varphi_{i,j}(t_1) \subseteq \varphi_{i,j}(t_2)$, а $\vee_j$ и $\wedge_j$ — операции объединения и пересечения на T_j как на свободной дистрибутивной решетке. Докажем еще несколько свойств введенных обозначений.

1.) $t \in T_j \Rightarrow \varphi_{i+1,j}(t) = \varphi_{i,j}(t) \cup X_{i+1,j}$.

Доказательство. Для $j = 0$ равенство следует из определений. Пусть оно справедливо для некоторого j; докажем его для $j + 1$. Достаточно доказать это равенство в предположении $t \in \alpha_j(T_j) \cup \beta_{j+1}(D_{j+1})$.

В случае $x \in D_{j+1}$ $\varphi_{i+1,j+1}(\beta_{j+1}(x)) = V_x^{j+1} \cup X_{i+1,j+1} = (V_x^{j+1} \cup X_{i,j+1}) \cup X_{i+1,j+1} = \varphi_{i,j+1}(\beta_{j+1}(x)) \cup X_{i+1,j+1}$. Для $t \in T_j$ имеем $\varphi_{i+1,j+1}(\alpha_j(t)) =$

$\Psi_j(\varphi_{i+1,j}(t)) \cup X_{i+1,j+1} = \Psi_j(\varphi_{i,j}(t) \cup X_{i+1,j}) \cup X_{i+1,j+1} = \Psi_j(\varphi_{i,j}(t)) \cup \Psi_j(X_{i+1,j}) \cup X_{i+1,j+1} = \Psi_j(\varphi_{i,j}(t)) \cup X_{i+1,j+1} = (\Psi_j(\varphi_{i,j}(t)) \cup X_{i,j+1}) \cup X_{i+1,j+1} = \varphi_{i,j+1}(\alpha_j(t)) \cup X_{i+1,j+1}$. $\square$

2.) Для $t_1, t_2 \in T_j$ $t_1 \leqslant^{i,j} t_2 \Rightarrow t_1 \leqslant^{i+1,j} t_2$. Отображение $\widetilde{\mathcal{T}}_{i,j}$ в $\widetilde{\mathcal{T}}_{i+1,j}$, индуцированное тождественным отображением T_j на себя, сохраняет операцию объединения.

Доказательство. Это прямое следствие предыдущего утверждения. $\square$

Пусть для $t_1, t_2 \in T_j$ $t_1 \leqslant^j t_2 \Leftrightarrow \exists i(t_1 \leqslant^{i,j} t_2)$. В связи с доказанным выше утверждением $\mathcal{T}_j = \langle T_j, \leqslant^j; \vee_j, \wedge_j \rangle$ — дистрибутивная предрешетка, которая совпадает с $\mathcal{T}_{i,j}$ для всех достаточно больших i.

3.) Для всех $i, j \in \mathbb{N}$ и $t_1, t_2 \in T_j$ $t_1 \leqslant^j t_2 \Leftrightarrow$ множество $\varphi_{i,j}(t_1) \setminus \varphi_{i,j}(t_2)$ конечно.

Доказательство. Это опять следствие утверждения 1. Действительно, если $\varphi_{i,j}(t_1) \setminus \varphi_{i,j}(t_2)$ конечно, то для $k > i$ $\varphi_{k,j}(t_1) \setminus \varphi_{k,j}(t_2) = (\varphi_{i,j}(t_1) \cup X_{k,j}) \setminus (\varphi_{i,j}(t_2) \cup X_{k,j})$; последнее равно $\emptyset$ при всех достаточно больших k. Обратно, если для некоторого i $\varphi_{i,j}(t_1) \setminus \varphi_{i,j}(t_2) = \emptyset$, то $(\varphi_{0,j}(t_1) \cup X_{i,j}) \setminus (\varphi_{0,j}(t_2) \cup X_{i,j}) = \emptyset$ и $(\varphi_{0,j}(t_1) \cup X_{k,j}) \setminus (\varphi_{k,j}(t_2) \cup X_{k,j})$ конечно для всех $k \geqslant 0$. $\square$

4.) Для любого $j \in \mathbb{N}$ существует отображение $\gamma_j : T_j \to D_j$, обладающее следующим свойством: для любых $i \in \mathbb{N}$ и $t \in T_j$ множества $\varphi_{i,j}(t)$, $\varphi_{i,j}(\beta_j(\gamma_j(t)))$ и $V^j_{\gamma_j(t)}$ совпадают по модулю конечных множеств.

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по j.

Для $j = 0$ рассмотрим $\gamma_0 : T_0 \to D_0$, обладающее следующими свойствами: для $x \in D_0$ $\gamma_0(\beta_0(x)) \equiv_0 x$, $\gamma_0(t_1 \vee_0 t_2) \equiv_0 u_0(\gamma_0(t_1), \gamma_0(t_2))$, $\gamma_0(t_1 \wedge_0 t_2) \equiv_0 v_0(\gamma_0(t_1), \gamma_0(t_2))$ (в силу дистрибутивности $\widetilde{\mathcal{D}}_0$ такое γ_0 существует). В силу свойств 1, 2 и 4 множеств V^0_x имеем $\varphi_{i,0}(t) =^* \varphi_{i,0}(\beta_0(\gamma_0(t))) =^* V^0_{\gamma_0(t)}$ для всех i.

Пусть для j утверждение справедливо; покажем, что оно справедливо для $j+1$. Сначала докажем это утверждение для элементов T_{j+1} вида $\alpha_j(t)$, где $t \in T_j$. В силу свойства конечных точечных операторов сохранять равенство по модулю конечных множеств имеем: $\varphi_{i,j+1}(\alpha_j(t)) = \Psi_j(\varphi_{i,j}(t)) \cup X_{i,j+1} =^* \Psi_j(\varphi_{i,j}(t)) =^* \Psi_j(V^j_{\gamma_j(t)}) = V^{j+1}_{\gamma_j(t)} =^* \varphi_{i,j+1}(\beta_j(\gamma_j(t)))$ и можно положить $\gamma_{j+1}(\alpha_j(t)) = \gamma_j(t)$. Далее действуем по тому же принципу, что и при доказательстве базы индукции; доопределяем γ_{j+1} на остальных элементах T_{j+1} так, чтобы выполнялись свойства: для $x \in D_{j+1}$ $\gamma_{j+1}(\beta_{j+1}(x)) \equiv_{j+1} x$, $\gamma_{j+1}(t_1 \vee_{j+1} t_2) \equiv_{j+1} u_{j+1}(\gamma_{j+1}(t_1), \gamma_{j+1}(t_2))$, $\gamma_{j+1}(t_1 \wedge_{j+1} t_2) \equiv_{j+1} v_{j+1}(\gamma_{j+1}(t_1), \gamma_{j+1}(t_2))$.

Требуемые равенства опять следуют из свойств 1, 2 и 4 множеств V_x^{j+1}, а существование доопределения — из дистрибутивности $\widetilde{\mathcal{D}}_{j+1}$. $\square$

Зафиксируем отображения γ_j, о которых говорится в предыдущем утверждении. Будем считать (из доказательства утверждения видно, что это можно сделать), что для $x \in D_j$ $\gamma_j(\beta_j(x)) = x$, а для $t \in T_j$ $\gamma_{j+1}(\alpha_j(t)) = \gamma_j(t)$.

5.) Решетки $\widetilde{\mathcal{T}}_j$ и $\widetilde{\mathcal{D}}_j$ изоморфны. Изоморфизм определяется отображением γ_j.

Доказательство. Действительно, из утверждений 3 и 4, а также свойств 1 и 3 множеств V_x^j следует, что для $t_1, t_2 \in T_j$ $t_1 \leqslant^j t_2 \Leftrightarrow \gamma_j(t_1) \leqslant_j \gamma_j(t_2)$. Значит, γ_j, как отображение из $\widetilde{\mathcal{T}}_j$ в $\widetilde{\mathcal{D}}_j$, определено корректно, сохраняет порядок и переводит несравнимые элементы в несравнимые. Так как $\gamma_j \circ \beta_j$ тождественно на $\mathcal{D}_j$, то γ_j, как отображение из $\widetilde{\mathcal{T}}_j$ в $\widetilde{\mathcal{D}}_j$, сюрьективно. $\square$

6.) Для $i, j \in \mathbb{N}$ и $t_1, t_2 \in T_j$ $t_1 \leqslant^{i,j} t_2 \Rightarrow \alpha_j(t_1) \leqslant^{i,j+1} \alpha_j(t_2)$ и $\alpha_j(t_1 \vee_j t_2) \equiv^{i,j+1} \alpha_j(t_1) \vee_{j+1} \alpha_j(t_2)$.

Доказательство. Первое следует из очевидной импликации: $\varphi_{i,j}(t_1) \subseteq \varphi_{i,j}(t_2) \Rightarrow \Psi_j(\varphi_{i,j}(t_1)) \cup X_{i,j+1} \subseteq \Psi_j(\varphi_{i,j}(t_2)) \cup X_{i,j+1}$. Второе следует из следующей цепочки равенств: $\varphi_{i,j+1}(\alpha_j(t_1 \vee_j t_2)) = \Psi_j(\varphi_{i,j}(t_1 \vee_j t_2)) \cup X_{i,j+1} = \Psi_j(\varphi_{i,j}(t_1) \cup \varphi_{i,j}(t_2)) \cup X_{i,j+1} = (\Psi_j(\varphi_{i,j}(t_1)) \cup X_{i,j+1}) \cup (\Psi_j(\varphi_{i,j}(t_2)) \cup X_{i,j+1}) = \varphi_{i,j+1}(\alpha_j(t_1)) \cup \varphi_{i,j+1}(\alpha_j(t_2)) = \varphi_{i,j+1}(\alpha_j(t_1) \vee_{j+1} \alpha_j(t_2))$. $\square$

7.) $\beta_0(0)$ — наименьший, а $\beta_0(1)$ — наибольший элементы в $\mathcal{T}_{0,0}$ соответсвенно. Если $t_0, t_1 \in T_j$ — наименьший и наибольший элементы в $\mathcal{T}_{i,j}$ соответсвенно, то t_0 — наименьший в $\mathcal{T}_{i+1,j}$, t_1 — наибольший в $\mathcal{T}_{i+1,j}$, $\alpha_j(t_0)$ — наименьший в $\mathcal{T}_{i,j+1}$ и $\alpha_j(t_1)$ — наибольший в $\mathcal{T}_{i,j+1}$.

Доказательство. Первое утверждение следует из определения $\varphi_{0,0}$ и свойства 1 множеств V_x^0. Второе утверждение в той части, которая касается $\mathcal{T}_{i+1,j}$, является прямым следствием утверждения 2.

Для остального докажем индукцией по j, что $\varphi_{i,j}(t_0) = V_0^j \cup X_{i,j}$ и $\varphi_{i,j}(t_1) = V_1^j \cup X_{i,j}$. Для $j = 0$ справедливость этого утверждения уже отмечена выше. Пусть для j это верно: тогда, в силу монотонности Ψ_j, наименьшим по включению множеством в $\varphi_{i,j+1}(\alpha_j(T_j))$ будет $\Psi_j(V_0^j \cup X_{i,j}) \cup X_{i,j+1} = \Psi_j(V_0^j) \cup \Psi_j(X_{i,j}) \cup X_{i,j+1} = V_0^{j+1} \cup X_{i,j+1}$, а наибольшим — $\Psi_j(V_1^j \cup X_{i,j}) \cup X_{i,j+1} = \Psi_j(V_1^j) \cup \Psi_j(X_{i,j}) \cup X_{i,j+1} = V_1^{j+1} \cup X_{i,j+1}$. Однако эти же множества будут соответственно наибольшим и наименьшим по включению в $\varphi_{i,j+1}(\beta_{j+1}(D_{j+1}))$ и, следовательно, останутся таковыми в

$\varphi_{i,j+1}(T_{j+1})$. Остается лишь, опираясь на это утверждение, заметить, что $\varphi_{i,j+1}(\alpha_j(t_0)) = V_0^{j+1} \cup X_{i,j+1}$ и $\varphi_{i,j+1}(\alpha_j(t_1)) = V_1^{j+1} \cup X_{i,j+1}$. $\square$

Для $i \leqslant j$ через $\alpha_{i,j}$ обозначим вложение T_i в T_j, равное $\alpha_{j-1} \circ \ldots \circ \alpha_i$ ($\alpha_{i,i}$ — тождественное отображение T_i на себя при $j = i$). Отметим, что $\gamma_j \circ \alpha_{i,j} = \gamma_i$. Как следует из утверждений 2 и 6, для $t_1, t_2 \in T_i$ $t_1 \leqslant^{i,i} t_2 \Rightarrow \alpha_{i,j}(t_1) \leqslant^{j,j} \alpha_{i,j}(t_2)$ и $\alpha_{i,j}(t_1 \vee_i t_2) \equiv^{j,j} \alpha_{i,j}(t_1) \vee_j \alpha_{i,j}(t_2)$, то есть $\alpha_{i,j}$ индуцирует гомоморфизм полурешетки $\widetilde{\mathcal{T}}_{i,i}$ в полурешетку $\widetilde{\mathcal{T}}_{j,j}$. Пусть $T = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} T_i$, а для $t_1 \in T_i$ и $t_2 \in T_j$ $t_1 \leqslant_T t_2 \Leftrightarrow (\exists k \geqslant i, j)(\alpha_{i,k}(t_1) \leqslant^{k,k} \alpha_{j,k}(t_2))$. Тогда $\mathcal{T} = \langle T, \leqslant_T \rangle$ — дистрибутивная предполурешетка, такая что ассоциированная с ней полурешетка $\widetilde{\mathcal{T}}$ изоморфна прямому пределу системы $\{\widetilde{\mathcal{T}}_{i,i}, \alpha_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{N}}$.

8.) Полурешетки $\widetilde{\mathcal{T}}$ и $\widetilde{\mathcal{L}}$ изоморфны.

Доказательство. Пусть γ — отображение из T в $\mathbb{N}$, действующее по следующему правилу: для $t \in T_i$ $\gamma(t) = \gamma_i(t)$. Покажем, что γ определяет требуемый изоморфизм.

Покажем, что $t_1 \leqslant_T t_2 \Leftrightarrow \gamma(t_1) \leqslant_\omega \gamma(t_2)$. Пусть $t_1 \in T_i$ и $t_2 \in T_j$. Если $t_1 \leqslant_T t_2$, то пусть $k \geqslant i, j$ таково, что $\alpha_{i,k}(t_1) \leqslant^{k,k} \alpha_{j,k}(t_2)$. Поскольку $\alpha_{i,k}(t_1) \leqslant^k \alpha_{j,k}(t_2)$, то из утверждения 5 получаем $\gamma(t_1) = \gamma_i(t_1) = \gamma_k(\alpha_{i,k}(t_1)) \leqslant_k \gamma_k(\alpha_{j,k}(t_1)) = \gamma_j(t_1) = \gamma(t_1)$. Пусть, наоборот, $\gamma(t_1) \leqslant_\omega \gamma(t_2)$. Пусть $k \geqslant i, j$ таково, что $\gamma_i(t_1) \leqslant_k \gamma_j(t_2)$. Пусть $m \geqslant k$ настолько велико, что $\mathcal{T}_{m,k} = \mathcal{T}_k$. Тогда $\gamma_i(t_1) = \gamma_k(\alpha_{i,k}(t_1)) \leqslant_k \gamma_k(\alpha_{j,k}(t_2)) = \gamma_j(t_2)$, по утверждению 5 $\alpha_{i,k}(t_1) \leqslant^{m,k} \alpha_{j,k}(t_2)$ и, по утверждению 6, $\alpha_{i,m}(t_1) = \alpha_{k,m}(\alpha_{i,k}(t_1)) \leqslant^{m,m} \alpha_{k,m}(\alpha_{j,k}(t_2)) = \alpha_{j,m}(t_2)$.

Мы доказали, что γ, как отображение из $\widetilde{\mathcal{T}}$ в $\widetilde{\mathcal{L}}$, определено корректно, сохраняет порядок и переводит несравнимые элементы в несравнимые. Осталось заметить, что $\gamma(T) = \mathbb{N}$ и, следовательно, γ, как отображение из $\widetilde{\mathcal{T}}$ в $\widetilde{\mathcal{L}}$, сюрьективно. $\square$

Для завершения доказательства теоремы осталось интерпретировать последовательность предрешеток $\{\mathcal{T}_{i,i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ как последовательность со свойствами 1 – 7 из определения лахлановской полурешетки. Множества T_i заданы эффективно; в связи с этим имеют смысл (и справедливы) следующие утверждения: множества T_i и отображения α_i вычислимы равномерно по i, функции $t_1 \vee_i t_2$, $t_1 \wedge_i t_2$ вычислимы как функции от t_1, t_2 и i, Π^0_{n+2}-индекс отношения $t_1 \leqslant^{i,i} t_2$ вычислим равномерно по t_1, t_2 и i (это следует из того, что Σ^0_{n+1}-индексы множеств $\varphi_{i,i}(t)$ вычислимы равномерно по i и t). Пусть ε — вычислимая функция из T на $\mathbb{N}$, такая что для каждого $i \in \mathbb{N}$ $\varepsilon \upharpoonright T_i$ инъективна и $\varepsilon(\alpha_i(t)) = \varepsilon(t)$ для любого $t \in T_i$, $\varepsilon(\beta_0(0)) = 0$, $\varepsilon(\beta_0(1)) = 1$. Пусть $D'_i = \varepsilon(T_i)$ и для всех $t_1, t_2 \in D'_i$ $\varepsilon(t_1) \leqslant'_i \varepsilon(t_2) \Leftrightarrow t_1 \leqslant^{i,i} t_2$, $u'_i(\varepsilon(t_1), \varepsilon(t_2)) = \varepsilon(t_1 \vee_i t_2)$, $v'_i(\varepsilon(t_1), \varepsilon(t_2)) = \varepsilon(t_1 \wedge_i t_2)$. Тогда последовательность $\{\langle D'_i, \leqslant'_i; u'_i, v'_i \rangle\}_{i \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям 1 – 7 определения лахлановской полурешетки и полурешетка, задаваемая этой последовательностью, изоморфна $\widetilde{\mathcal{T}}$. Доказательство этого факта, равно как и технические детали определения функции ε, не представляют принципиальной трудности и могут быть опущены. $\square$

Замечание 1 *Можно еще ослабить условия из определения n-лахлановской полурешетки, полагая, в пункте 6 функции u_i $\emptyset^{(n+1)}$-вычислимыми равномерно по i.*

Доказательство. Действительно, единственное место, где мы в доказательстве теоремы используем вычислимость u_i-ых — это вычислимость Σ^0_{n+2}-индекса условия "B — молекула в $\mathcal{D}_i$"равномерно по B и i. Однако это остается верным и при $\emptyset^{(n+1)}$-вычислимости u_i-ых. $\square$

Список литературы

[1] Гончаров, С. С., Сорби, А., Обобщенно вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса, *Алгебра и Логика*, **36**, No. 6, 621 – 641, 1997.

[2] Гретцер, Г., *Общая теория решеток*, Мир, Москва, 1982.

[3] Денисов, С. Д., Строение верхней полурешетки рекурсивно перечислимых m-степеней и смежные вопросы. 1, *Алгебра и Логика*, **17**, No. 6, 643 – 683, 1978.

[4] Ершов, Ю. Л., *Теория нумераций*, Наука, Москва, 1977.

[5] Ершов, Ю. Л., Необходимые условия изоморфизма полурешеток Роджерса конечных частично упорядоченных множеств, *Алгебра и Логика*, **42**, No. 4, 413 – 421, 2003.

[6] Lachlan, A. H., Recursively enumerable many-one degrees, *Алгебра и Логика*, **11**, No. 3, 326 – 358, 1972.

[7] Подзоров С. Ю., О локальном строении полурешеток Роджерса Σ^0_n-вычислимых нумераций, *Алгебра и Логика*, сдана в печать.

[8] Роджерс, Х., *Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость*, Мир, Москва, 1972.