

УДК 512.540+510.5

**О Σ -подмножествах натуральных чисел в наследственно
конечном допустимом множестве ***

А.Н.Хисамиев

19 августа 2004 г.

Аннотация

В данной работе получены условия Σ -определимости подмножества натуральных чисел в наследственно конечном допустимом множестве над моделью. Приведены условия вычислимости семейства подмножеств натуральных чисел в наследственно конечном допустимом множестве. Доказаны: для любого e -идеала I существует абелева группа без кручения A такая, что семейство e -степеней Σ -подмножеств ω в $\mathbb{HF}(A)$ совпадает с I ; существует вполне разложимая абелева группа без кручения, в наследственно конечном допустимом множестве над которой, не существует универсальной Σ -функции; для любого главного e -идеала I существует периодическая абелева группа A такая, что семейство e -степеней Σ -подмножеств ω в $\mathbb{HF}(A)$ совпадает с I .

Ключевые слова: Допустимые множества, e -сводимость, вычислимость, Σ -определимость, абелева группа.

Проблемы Σ -определимости подмножеств множества конечных ординалов в допустимых множествах исследовались в работах [1]–[5]. В [2], [3], [5] изучались взаимосвязи T -сводимости и Σ -определимости, в [1], [4] – соотношения между e -сводимостью и семейством Σ -подмножеств ω в допустимых множествах. В [1] приведены примеры моделей, в наследственно конечных надстройках над которыми, семейство Σ -определимых подмножеств ω совпадает с $I^* = \{S \subseteq \omega \mid d_e(S) \in I\}$, где I – произвольный e -идеал. Данная статья навеяна этой работой.

Все необходимые сведения о допустимых множествах можно найти в [6] или [7]. Основные сведения по классической теории вычислимости и теории групп можно узнать, например, из [8] и [9] соответственно. В данной работе мы рассматриваем наследственно конечные допустимые множества над моделями конечных сигнатур.

*Частично поддержано грантами РФФИ №02-01-00593, INTAS-00-499 и Минобразования PD02-1.1-201.

Мы используем стандартные обозначения. Напомним некоторые из них. Через W_n обозначается n -е вычислимо перечислимое множество. Через D_n – n -е конечное множество, то есть $D_n = \{a_1, \dots, a_k\}$, если $n = \sum_{i=1}^k 2^{a_i}$. Сводимость по перечислению (сокращенно e -сводимость) определяется следующим образом:

$$A \leq_e B \Leftrightarrow \exists n \forall t (t \in A \Leftrightarrow \exists m (\langle t, m \rangle \in W_n \& D_m \subseteq B)).$$

Определим операторы перечисления Φ_n как

$$\Phi_n(S) = \{x \mid \exists m (\langle x, m \rangle \in W_n \& D_m \subseteq S)\}.$$

Мы получим другое определение e -сводимости

$$A \leq_e B \Leftrightarrow \exists n (\Phi_n(B) = A).$$

В этом случае будем говорить, что множество W_n задает оператор Φ_n .

Последовательность $\{\Theta_n\}_{n \in \omega}$ операторов перечисления назовем вычислимой, если существует вычислимая последовательность $\{A_n\}_{n \in \omega}$ вычислимо перечислимых множеств, задающих операторы Θ_n .

Произвольное непустое семейство e -степеней множеств натуральных чисел называется e -идеалом I , если выполнены следующие условия:

1. $a \leq_e b$ и $b \in I \Rightarrow a \in I$.
2. $a, b \in I \Rightarrow a \sqcup b \in I$.

В дальнейшем, через $(M^n)_\neq$ обозначим множество всех последовательностей попарно различных элементов из M длины n , то есть $(M^n)_\neq = \{\bar{a} \in M^n \mid a_i \neq a_j, i < j\}$.

Будем считать, что если сигнатуры моделей $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1$ различны, то \mathfrak{M}_0 не вложима в \mathfrak{M}_1 .

§ 1 Условие Σ -определимости подмножеств натуральных чисел.

Пусть даны модель \mathfrak{M} конечной сигнатуры σ и некоторое подмножество $M_0 \subseteq M$. Предположим, что справедливы условия:

1. Для любой конечной последовательности попарно различных элементов $\bar{a} = \langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle \in (M_0^{<\omega})_\neq$ определено Σ -подмножество $S_{\bar{a}} \subseteq \omega$ в $\text{HIF}(\mathfrak{M})$. Если $n = 0$, то $S_{\bar{a}} = S_\emptyset$.

2. Для любого числа $n \in \omega$ определен вычислимый класс конструктивных моделей $K_n = \{\langle \mathfrak{M}_r^n, \bar{b} \rangle \mid r \in \omega\}$, $\bar{b} = \langle b_0, \dots, b_{n-1} \rangle$, $\bar{b} \in (M_r^n)_\neq$ и для каждого числа $r \in \omega$ эффективно определено конечное множество $S_r^n \subseteq \omega$ такое, что модель $\langle \mathfrak{M}_r^n, \bar{b} \rangle$ изоморфно вложима в $\langle \mathfrak{M}, \bar{a} \rangle$ тогда и только тогда, когда $S_r^n \subseteq S_{\bar{a}}$, $\bar{a} \in (M_0^n)_\neq$.

3. Для любой конечно порожденной подмодели $\langle \mathfrak{M}', \bar{a} \rangle \subseteq \langle \mathfrak{M}, \bar{a} \rangle$, $\bar{a} \in (M_0^n)_{\neq}$ существует такое число r , что $S_r^n \subseteq S_{\bar{a}}$ и модель $\langle \mathfrak{M}', \bar{a} \rangle$ изоморфно вложима в $\langle \mathfrak{M}_r^n, \bar{b} \rangle$.

Тогда справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть даны Σ -формула $\varphi(x, y_0, \dots, y_{n-1})$ сигнатуры $\sigma' = \{\sigma, \in, \emptyset\}$ без параметров и последовательность элементов $\bar{a} = \langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle \in (M_0^n)_{\neq}$. Если множество $A \subseteq \omega$ определимо формулой $\varphi(x, \bar{a})$ в $\mathbb{HIF}(\mathfrak{M})$, то $A \leq_e S_{\bar{a}}$ и, наоборот, если $A \leq_e S_{\bar{a}}$, то множество A Σ -определимо в $\mathbb{HIF}(\mathfrak{M})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вторая часть предложения доказана в [1]. Докажем первую часть. Пусть

$$A = \varphi^{\mathbb{HIF}(\mathfrak{M})}[x, \bar{a}] \subseteq \omega,$$

и множество

$$W_s = \{\langle m, r \rangle \mid \mathbb{HIF}(\mathfrak{M}_r^n, \bar{b}) \models \varphi(m, \bar{b})\}. \quad (1)$$

По условию 2 множество W_s вычислимо перечислимо.

Покажем справедливость равенства

$$A = \{m \mid \exists r (\langle m, r \rangle \in W_s \ \& \ S_r^n \subseteq S_{\bar{a}})\}. \quad (2)$$

Обозначим правую часть этого равенства через B .

Пусть $m \in A$. Тогда

$$\mathbb{HIF}(\mathfrak{M}) \models \varphi(m, \bar{a}). \quad (3)$$

Существует конечно порожденная подмодель $\langle \mathfrak{M}', \bar{a} \rangle \subseteq \langle \mathfrak{M}, \bar{a} \rangle$ такая, что

$$\mathbb{HIF}(\mathfrak{M}', \bar{a}) \models \varphi(m, \bar{a}). \quad (4)$$

По условию 3 существует такое число r , что $S_r^n \subseteq S_{\bar{a}}$ и модель $\langle \mathfrak{M}', \bar{a} \rangle$ изоморфно вложима в $\langle \mathfrak{M}_r^n, \bar{b} \rangle$. Отсюда из (4) имеем

$$\mathbb{HIF}(\mathfrak{M}_r^n, \bar{b}) \models \varphi(m, \bar{b}). \quad (5)$$

Следовательно имеем

$$\langle m, r \rangle \in W_s \ \& \ S_r^n \subseteq S_{\bar{a}},$$

т.е. $m \in B$.

Пусть наоборот, $m \in B$. Тогда из (1) следует (5). По условию 2 модель $\langle \mathfrak{M}_r^n, \bar{b} \rangle$ изоморфно вложима в $\langle \mathfrak{M}, \bar{a} \rangle$. Следовательно имеем (3). Отсюда $m \in A$.

Таким образом равенство (2) доказано.

Пусть вычислимая функция f такая, что $S_r^n = D_{f(r)}$, и множество

$$W'_s = \{\langle m, f(r) \rangle \mid \langle m, r \rangle \in W_s\}. \quad (6)$$

Ясно, что W'_s вычислимо перечислимо. Из (2) и (6) имеем

$$A = \{m \mid \exists t(\langle m, t \rangle \in W'_s \ \& \ D_t \subseteq S_{\bar{a}})\},$$

т.е. $A \leq_e S_{\bar{a}}$. □

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть для последовательности $\bar{a} \in (M_0^n)_{\neq}$ множество $S_{\bar{a}}$ определимо Σ -формулой с параметрами \bar{a} . Тогда множество $A \subseteq \omega$ Σ -определима некоторой формулой $\varphi(x, \bar{a})$, если и только если $A \leq_e S_{\bar{a}}$.

Введем условие 2'.

2'. Для любого числа $n \in \omega$ равномерно по n определен вычислимый класс конструктивных моделей $K_n = \{\langle \mathfrak{M}_r^n, \bar{b} \rangle \mid r \in \omega\}$, $\bar{b} = \langle b_0, \dots, b_{n-1} \rangle$, $\bar{b} \in (M_r^n)_{\neq}$ и для любых чисел n, r равномерно по n и r эффективно определено конечное множество $S_r^n \subseteq \omega$ такое, что модель $\langle \mathfrak{M}_r^n, \bar{b} \rangle$ изоморфно вложима в $\langle \mathfrak{M}, \bar{a} \rangle$, тогда и только тогда, когда $S_r^n \subseteq S_{\bar{a}}$, $\bar{a} \in (M_0^n)_{\neq}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть для модели \mathfrak{M} и множества M_0 справедливы условия 1, 2', 3. Тогда в предложении 1 требуемый оператор перечисления находится по формуле φ эффективно.

Пусть для модели \mathfrak{M} и множества M_0 , кроме условий 1 – 3 также справедливо:

4. Для любого элемента $x \in M$ существуют последовательность $\bar{a} \in (M_0^{<\omega})_{\neq}$ и Σ -формула $\varphi(x, \bar{y})$ без параметров такие, что x определяется формулой $\varphi(x, \bar{a})$ в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$.

Тогда будем говорить, что модель \mathfrak{M} $S\Sigma$ -порождена множеством M_0 .

Если модель \mathfrak{M} $S\Sigma$ -порождена основным множеством M , то будем говорить, что модель \mathfrak{M} $S\Sigma$ -порождена.

Из предложения 1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть \mathfrak{M} $S\Sigma$ -порождена множеством M_0 . Множество $A \subseteq \omega$ Σ -определимо в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$ тогда и только тогда, когда существует такая последовательность $\bar{a} \in (M_0^{<\omega})_{\neq}$ такая, что $A \leq_e S_{\bar{a}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = \varphi^{\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})}[x, \bar{b}]$, где $\bar{b} = \langle b_0, \dots, b_{m-1} \rangle \in (M^n)_{\neq}$. По условию 4 существует последовательность $\bar{a} \in (M_0^{<\omega})_{\neq}$ такая, что для любого $i < m$ существует формула $\varphi_i(y, \bar{a})$, сигнатуры $\sigma' \cup \bar{a}$, $\sigma' = \sigma \cup \{U, \in, \emptyset\}$, определяющая элемент b_i в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$. Рассмотрим формулу

$$\psi(x, \bar{a}) = \exists y_0 \dots \exists y_{m-1} (\varphi(x, \bar{y}) \wedge \bigwedge_{i < m} \varphi_i(y_i, \bar{a})).$$

Легко проверить, что справедливо равенство

$$\varphi^{\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})}[x, \bar{b}] = \psi^{\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})}[x, \bar{a}].$$

Отсюда и из предложения 1 получаем требуемое. \square

ЛЕММА 1. *Любая модель \mathfrak{M} конечной чисто предикатной сигнатуры σ $S\Sigma$ -порождена.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим справедливость условий 1–4. Пусть дано число $n \in \omega$. Через K_n обозначим класс всех конечных моделей сигнатуры $\sigma \cup \bar{b}$, $\bar{b} = \langle b_0, \dots, b_{n-1} \rangle$, основные множества которых являются начальным отрезком упорядоченного множества $\langle \{b_i \mid i \in \omega\}, < \rangle$, где $b_i < b_j$, если $i < j$. Пусть Γ_n — эффективная нумерация этого класса, $\mathfrak{M}_r^n = \Gamma_n(r)$, $S_r^n = \{r\}$. Легко проверить, что класс K_n является равномерно по n вычислимой последовательностью конструктивных моделей.

Пусть дана последовательность $\bar{a} \in (M^{<\omega})_{\neq}$, $a = \langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle$. Через $S_{\bar{a}}$ обозначим множество таких чисел r , что модель $\langle \mathfrak{M}_r^n, \bar{b} \rangle$ изоморфно вложима в $\langle \mathfrak{M}, \bar{a} \rangle$.

Покажем, что множество $S_{\bar{a}} \subseteq \omega$ является Σ -определимым в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$. Пусть дано число $r \in \omega$. Предположим, что множество $M_r^n = \{b_0, \dots, b_{m-1}\}$. Через $\Phi'_r(b_0, \dots, b_{n-1}, \dots, b_{m-1})$ обозначим открытую диаграмму модели $\langle \mathfrak{M}_r^n, \bar{b} \rangle$. Пусть F — множество всех формул сигнатуры σ , а $\gamma : \omega \rightarrow F$ — эффективная нумерация этого множества. Пусть $\gamma(r') = \Phi_{r'}(\bar{x}) = \exists y_n \dots \exists y_{m-1} \Phi'_r(x_0, \dots, x_{n-1}, y_n, \dots, y_{m-1})$. Тогда последовательность множеств $\langle \gamma^{-1}F_0^n \mid n \in \omega \rangle$, где $F_0^n = \{\Phi_{r'}(\bar{x}) \mid r \in \omega\}$, вычислима. Функция $f(n, r) = r'$ вычислима, а следовательно, она Σ -определима в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$. Существует Σ -функция $h : M^{<\omega} \rightarrow \omega$ такая, что $h(\bar{a}) = n$, где $\bar{a} = \langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle$.

Поэтому множество

$$S_{\bar{a}} = \{r \mid \mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models Tr_{\mathfrak{M}}(f(h(\bar{a}), r), \bar{a})\},$$

где $Tr_{\mathfrak{M}}(m, \bar{a}) = \{\langle m, \bar{a} \rangle \mid m \text{ является номером } \exists\text{-формулы } \Phi_m(\bar{x}) \text{ сигнатуры } \sigma, \bar{a} \in M^{<\omega} \text{ и } \mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M}) \models \Phi_m(\bar{a})\}$, является Σ -множеством в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$.

Отсюда и из определения множества S_r^n следует, что условия 1, 2 для модели \mathfrak{M} и множества M выполнены. Покажем справедливость условия 3. Пусть дана конечная подмодель $\langle \mathfrak{M}', \bar{a} \rangle \subseteq \langle \mathfrak{M}, \bar{a} \rangle$. Тогда существует такое число $r \in \omega$, что модели $\langle \mathfrak{M}_r^n, \bar{b} \rangle \simeq \langle \mathfrak{M}', \bar{a} \rangle$. Отсюда $S_r^n = \{r\} \subseteq S_{\bar{a}}$, то есть условие 3 для модели \mathfrak{M} и множества M справедливо. Проверка условия 4 очевидна. Следовательно \mathfrak{M} $S\Sigma$ -порождена. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 3. *Из доказательства леммы следует, что*

1⁰. *для модели \mathfrak{M} и ее основного множества M справедливо условие 2'.*

2⁰. *$S_{\bar{a}}$ Σ -определимо формулой с параметрами \bar{a} .*

Отсюда, по лемме 1 и замечаниям 1, 2 получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть \mathfrak{M} является моделью чисто предикатной сигнатуры σ . Множество $A \subseteq \omega$ определимо некоторой Σ -формулой $\varphi(x, \bar{a})$ в $\mathbb{HIF}(\mathfrak{M})$ тогда и только тогда, когда $A \leq_e S_{\bar{a}}$. Более того, оператор перечисления по формуле φ находится эффективно.

Для модели \mathfrak{M} через $I_e(\mathfrak{M})$ обозначим идеал e -степеней Σ -подмножеств натуральных чисел в $\mathbb{HIF}(\mathfrak{M})$.

СЛЕДСТВИЕ 3. [1] Пусть дана модель \mathfrak{M} конечной чисто предикатной сигнатуры σ . Тогда идеал $I_e(\mathfrak{M})$ порождается e -степенями $d_e(Th_{\exists}(\mathfrak{M}, \bar{a}))$, где $\bar{a} \in M^{<\omega}$.

Действительно, по лемме 1 модель \mathfrak{M} $S\Sigma$ -порождена. Пусть $A \subseteq \omega$ Σ -определимо формулой $\varphi(x, \bar{a})$. По предложению 1 имеем $A \leq_e S_{\bar{a}}$. Из доказательства леммы 1 следует, что $S_{\bar{a}} \equiv_e Th_{\exists}(\mathfrak{M}, \bar{a})$. \square

В [9] доказано, что любая абелева p -группа, алгебра Ершова локально конструктивизируемы. Отсюда и из следствия 3 получаем

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть \mathfrak{M} является абелевой p -группой или алгеброй Ершова. Тогда любое Σ -подмножество натуральных чисел в $\mathbb{HIF}(\mathfrak{M})$ вычислимо перечислимо.

В [1] по любому непустому семейству непустых множеств натуральных чисел U и последовательности бесконечных кардиналов $\Lambda = \langle \alpha_S \mid S \in U \rangle$ построена модель $\mathfrak{M}'_{\langle U, \Lambda \rangle}$. На самом деле это построение корректно и в случае, когда U содержит пустое множество. Пусть даны непустое семейство множеств натуральных чисел U и последовательность Λ . Тогда справедлива

ЛЕММА 2. Если U содержит все конечные множества, то модель $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'_{\langle U, \Lambda \rangle}$ $S\Sigma$ -порождена множеством $M_0 = \{ \langle S, \gamma \rangle \mid S \in U, \gamma < \alpha_S \}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим условия 1–4 определения $S\Sigma$ -порожденной модели \mathfrak{M} множеством M_0 .

1. Пусть дана последовательность элементов $\bar{a} = \langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle \in (M_0^n)_{\neq}$, $a_i = \langle S_i, \alpha_i \rangle$. Положим

$$S_{\bar{a}} = S_0 \oplus \dots \oplus S_{n-1}.$$

Легко проверить, что $S_{\bar{a}}$ является Σ -подмножеством в $\mathbb{HIF}(\mathfrak{M})$.

2. Пусть дано число n . Зафиксируем эффективную нумерацию $\gamma^n : \omega \rightarrow A$, где A – множество всех конечных последовательностей попарно различных пар чисел длины $m \geq n$, $m \in \omega$. Пусть $\gamma^n r = \{ \langle e_j, p'_j \rangle \mid j < m \}$. Положим $U_r^n = \{ D_{e_0}, \dots, D_{e_{m-1}} \}$. Пусть $U_r^n = \{ D_{r_0}, \dots, D_{r_{t-1}} \}$,

где $D_{r_j} \neq D_{r_{j'}}$, $j < j' < t$, $p_{r_j} = \max\{p'_k \mid D_{r_j} = D_{e_k}, k < m\} + 1$, $\Lambda_r^n = \{p_{r_0}, \dots, p_{r_{t-1}}\}$, $\mathfrak{M}_r^n = \mathfrak{M}'_{\langle U_r^n, \Lambda_r^n \rangle}$, $b_i = \langle D_{e_i}, p'_i \rangle$. Положим

$$S_r^n = D_{e_0} \oplus \dots \oplus D_{e_{n-1}}.$$

Легко проверить, что модель $\langle \mathfrak{M}_r^n, \bar{b} \rangle$ изоморфно вложима в $\langle \mathfrak{M}, \bar{a} \rangle$ тогда и только тогда, когда $S_r^n \subseteq S_{\bar{a}}$.

3. Пусть дана конечно-порожденная подмодель $\langle \mathfrak{M}', \bar{a} \rangle \subseteq \langle \mathfrak{M}, \bar{a} \rangle$, $\bar{a} = \langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle \in (M_0^n)_{\neq}$. Не умоляя общности, можно считать, что если элемент вида $\langle S, \gamma, n \rangle \in M'$, то $\langle S, \gamma \rangle \in M'$. Допустим, что $\{a_j \mid j < m\}$, $m \geq n$ — множество всех элементов из M' , принадлежащих M_0 , $a_j = \langle S_j, \alpha_j \rangle$ и $D_{e'_j} = \{n \mid \langle S_j, \alpha_j, n \rangle \in M'\}$.

Легко проверить, что существуют такие числа e_j, p'_j , что для любого $j < m$ выполнены:

- 1) $D_{e'_j} \subseteq D_{e_j} \subseteq S_j$.
- 2) $\langle D_{e_j}, p'_j \rangle \neq \langle D_{e_{j'}}, p'_{j'} \rangle$, $j < j' < m$.

Пусть $\gamma r = \langle \langle e_j, p'_j \rangle \mid j < m \rangle$. Легко проверить, что модель $\langle \mathfrak{M}', \bar{a} \rangle$ изоморфно вложима в $\langle \mathfrak{M}_r^n, \bar{b} \rangle$, где $b_i = \langle D_{e_i}, p'_i \rangle$, $i < n$, и $S_r^n \subseteq S_{\bar{a}}$.

4. Пусть дан элемент $x \in M$. Если $x \in \omega$, то очевидно, что элемент x является Σ -определимым относительно сигнатуры $\langle 0, s \rangle$. Допустим $x = \langle S, \gamma, n \rangle$. Тогда

$$x = \langle S, \gamma, n \rangle \Leftrightarrow Q(x, \langle S, \gamma \rangle, n).$$

Следовательно любой элемент x является Σ -определимым в модели \mathfrak{M} с константами из M_0 .

Таким образом все условия выполняются. Поэтому модель $\mathfrak{M}'_{\langle U, \Lambda \rangle}$ $S\Sigma$ -порождена множеством M_0 . \square

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из доказательства пункта 2 леммы 2 следует, что модель \mathfrak{M} удовлетворяет условию 2'.

Пусть модель \mathfrak{M} сигнатуры σ и множество $M_0 \subseteq M$ удовлетворяют условиям 1, 2', 3 и

5. Существует вычислимая последовательность Σ -формул $\varphi_r^e(x, x_0, \dots, x_{r-1})$ без параметров сигнатуры σ' , $r, e \in \omega$, такая, что выполнены условия: а) для любых чисел r, e и последовательности $\bar{a} \in (M_0^r)_{\neq}$ множество $\{x \in M \mid \text{HIF}(\mathfrak{M}) \models \varphi_r^e(x, \bar{a})\}$ не более чем одноэлементно; б) для любого элемента $x \in M$ существуют числа r_x, e_x и последовательность $\bar{a}_x \in (M_0^{r_x})_{\neq}$ такие, что элемент x определяется в $\text{HIF}(\mathfrak{M})$ формулой $\varphi_{r_x}^{e_x}(x, \bar{a}_x)$.

Тогда будем говорить, что модель \mathfrak{M} *вычислимо $S\Sigma$ -порождена множеством M_0* .

Легко заметить, что справедлива

ЛЕММА 3. Пусть даны модель \mathfrak{M} и формула $\psi(x, y_0, \dots, y_{n-1}, \bar{b})$, $\bar{b} \in (M^t)_{\neq}$. Тогда по формуле ψ можно эффективно определить множество формул $\{\psi_i(x, y_0, \dots, y_{m_i-1}, \bar{b}) \mid i < s, m_i < n\}$ такое, что справедливо равенство:

$$\{\psi^{\mathfrak{M}}[x, \bar{a}, \bar{b}] \mid \bar{a} \in M^n\} = \{\psi_i^{\mathfrak{M}}[x, \bar{a}, \bar{b}] \mid i < s, \bar{a} \in (M^{m_i})_{\neq}, a_j \neq b_k\} \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть \mathfrak{M} вычислимо $S\Sigma$ -порождена множеством M_0 . Если семейство S подмножеств натуральных чисел вычислимо в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$, то семейство $S \cup \{\emptyset\}$ представимо в виде

$$\{\Theta_i(S_{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle}) \mid i \in \omega, \bar{a} \in (M_0^{m_i})_{\neq}, a_j \neq b_k\}$$

для некоторой вычислимой последовательности операторов перечисления Θ_i , $\bar{b} \in (M_0^t)_{\neq}$ и функция $m(i) = m_i$ вычислима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дано вычислимое семейство S подмножеств натуральных чисел в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$. Тогда по предложению 4.4 [1] и условию 5 найдется Σ -формула $\Psi(x_0, x_1, \bar{b})$ такая, что

$$S \cup \{\emptyset\} = \{\Psi^{\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})}[x_0, c, \bar{b}] \mid c \in \mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})\} \quad (8)$$

для некоторой фиксированной последовательности $\bar{b} \in (M_0^t)_{\neq}$.

Следуя Ю. Л. Ершову [7] введем множества $\mathfrak{H}_n = \mathbb{H}\mathbb{F}(n = \{i \mid i < n\})$, $\mathfrak{H}_0 = \mathbb{H}\mathbb{F}(\emptyset)$. Тогда $\mathbb{H}\mathbb{F}(\omega) = \bigcup_n \mathfrak{H}_n$. Существует Σ -нумерация $\alpha : \omega \rightarrow HF(\omega)$ в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$ множества $HF(\omega)$. Через t_m обозначим элемент из $HF(\omega)$ номера m и пусть $t_m \in \mathfrak{H}_{k_m}$, где $k_m = \min\{k \mid t_m \in \mathfrak{H}_k\}$, и

$$\Psi^{(m)}(x_0, z_0, \dots, z_{k_m-1}, \bar{b}) = \Psi(x, t_m(z_0, \dots, z_{k_m-1}), \bar{b}). \quad (9)$$

Функция $k(m) = k_m$ вычислима. Множество всех конечных последовательностей натуральных чисел вида $\alpha = \langle m, r_0, e_0, \dots, r_{k_m-1}, e_{k_m-1} \rangle$ обозначим через R . Очевидно, что множество R вычислимо. Пусть вычислимая функция ν перечисляет множество R .

Для любого числа $i \in \omega$ определим следующую формулу Ψ_i . Пусть $\nu(i) = \alpha$ и $k_m = q$. Тогда положим

$$\begin{aligned} \Psi_i(x, y_0^0, \dots, y_{r_0-1}^0, y_0^1, \dots, y_{r_{q-1}-1}^{q-1}, \bar{b}) &= \exists z_0 \dots \exists z_{q-1} \left(\bigwedge_{j < q} U(z_j) \wedge \right. \\ &\left. \wedge \Psi^{(m)}(x_0, z_0, \dots, z_{q-1}, \bar{b}) \wedge \bigwedge_{j < q} \varphi_{r_j}^{e_j}(z_j, y_0^j, \dots, y_{r_j-1}^j) \right), \end{aligned}$$

где формулы $\varphi_{r_j}^{e_j}$ такие же как в условии 5.

Из условия 5 следует, что для любой последовательности элементов $\bar{c} = \langle c_0, \dots, c_{q-1} \rangle \in M^{<\omega}$ существуют последовательность элементов $\alpha \in R$ и $\bar{a} = \langle \bar{a}_{c_0}, \dots, \bar{a}_{c_{q-1}} \rangle \in M_0^{<\omega}$ такие, что $\nu(i) = \alpha$ и

$$\Psi^{\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})}[x_0, t_m(\bar{c}), \bar{b}] = \Psi_i^{\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})}[x_0, \bar{a}, \bar{b}].$$

Отсюда и из (8), (9) имеем

$$S \cup \{\emptyset\} = \{\Psi_i^{\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})}[x_0, \bar{a}, \bar{b}] \mid i \in \omega, \bar{a} \in M_0^{m_i}\}. \quad (10)$$

По лемме 3 в равенстве 10 можно считать, что $\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle \in (M_0^{m_i+t})_{\neq}$. Тогда по замечанию 2 имеем

$$S \cup \{\emptyset\} = \{\Theta_i(S_{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle}) \mid i \in \omega, \bar{a} \in (M_0^{m_i})_{\neq}, a_j \neq b_k\},$$

для некоторой вычислимой последовательности операторов перечисления Θ_i , $i \in \omega$, $\bar{b} \in (M_0^t)_{\neq}$ и функция $m(i) = m_i$ вычислима. \square

Для модели \mathfrak{M} и подмножества $M_0 \subseteq M$ введем условия:

6. Множество M_0 является Σ -подмножеством в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$.

7. существует Σ -формула $\Phi_1(x, \bar{y})$ (возможно с параметрами) такая, что для любой последовательности $\bar{a} \in (M_0^{<\omega})_{\neq}$ справедливо равенство

$$\Phi_1^{\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})}[x, \bar{a}] = S_{\bar{a}}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Из доказательства леммы 1 следует, что для модели \mathfrak{M} чисто предикатной сигнатуры и множества M справедливо условия 6, 7.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть модель \mathfrak{M} вычислимо $S\Sigma$ -порождена множеством M_0 и справедливы условия 6, 7. Тогда семейство S подмножеств натуральных чисел вычислимо в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$ тогда и только тогда, когда $S \cup \{\emptyset\}$ представимо в виде

$$\{\Theta_i(S_{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle}) \mid i \in \omega, \bar{a} \in (M_0^{m_i})_{\neq}, a_j \neq b_k\} \quad (11)$$

для некоторой вычислимой последовательности операторов перечисления, $\bar{b} \in (M_0^t)_{\neq}$ и функция $m(i) = m_i$ вычислима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 требуется доказать достаточность. Пусть $S \cup \{\emptyset\}$ представимо в виде (11) и вычислимая последовательность вычислимо перечислимых множеств $\{A_i\}$ определяет операторы $\{\Theta_i\}$. Тогда существует Σ -формула Φ_2 такая, что

$$\Phi_2^{\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})}[x, i] = A_i.$$

Отсюда и из (11), по условию 7 имеем

$$S \cup \{\emptyset\} = \{\lambda x. \exists t \Phi_2(\langle x, t \rangle, i) \ \& \ \forall y \in t (y \in D_t \rightarrow \Phi_1(y, \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle)) \mid \\ i \in \omega, \bar{a} \in (M_0^{m_i})_{\neq}, a_j \neq b_k\}.$$

Так как множество $\{\bar{a} \in (M_0^{m_i})_{\neq} \mid i \in \omega, a_j \neq b_k\}$ Σ -определимо в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$, то семейство $S \cup \{\emptyset\}$ вычислимо. Отсюда S вычислимо. \square

Пусть $\mathfrak{M}'_{\langle U, \Lambda \rangle}$ – модель, построенная в [1].

СЛЕДСТВИЕ 6. [1] Если I – некоторый e -идеал и модель $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}'_{\langle I^*, \Lambda \rangle}$. Тогда семейство множеств натуральных чисел S вычислимо в $\mathbb{HIF}(\mathfrak{M})$ тогда и только тогда, когда $S \cup \{\emptyset\}$ представимо в виде

$$\{\Theta_i(R, A) \mid i \in \omega, R \in I^*\}$$

для некоторой вычислимой последовательности операторов перечисления Θ_i и $A \in I^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность легко следует из существования универсального Σ -предиката для допустимых множеств конечной сигнатуры. Докажем необходимость. Пусть семейство S вычислимо. Тогда из теоремы 1 следует

$$S \cup \{\emptyset\} = \{\Theta_i^1(S_{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle}) \mid i \in \omega, \bar{a} \in (M_0^{m_i})_{\neq}, a_j \neq b_k\}$$

для некоторой вычислимой последовательности операторов перечисления Θ_i^1 , $\bar{b} \in (M_0^t)_{\neq}$ и функция $m(i) = m_i$ вычислима. Из доказательства леммы 2 вытекает

$$S_{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle} = S_0 \oplus \dots \oplus S_{m_i-1} \oplus A_0 \oplus \dots \oplus A_{t-1},$$

где $a_j = \langle S_j, \gamma_j \rangle$, $j < m_i$, $b_k = \langle A_k, \beta_k \rangle$, $k < t$.

Тогда существует вычислимая последовательность операторов перечисления Θ_i такая, что

$$S \cup \{\emptyset\} = \{\Theta_i(S_0 \oplus \dots \oplus S_{m_i-1}, A_0 \oplus \dots \oplus A_{t-1}) \mid S_j \in I^*, j < m_i, i \in \omega\}.$$

Осталось заметить, что $\{S_0 \oplus \dots \oplus S_{m_i-1} \mid S_j \in I^*, j < m_i\} = I^*$. \square

§ 2 Σ -подмножества натуральных чисел над абелевыми группами.

Пусть P – множество всех простых чисел и $S = \{S_\alpha \mid \alpha < \beta\}$ – некоторое непустое семейство подмножеств простых чисел, где β – некоторый бесконечный ординал. Для любого ординала $\alpha < \beta$ и числа $i \in \omega$ определим группу $A_\alpha^{(i)}$ следующим заданием порождающих и определяющих соотношений:

$$A_\alpha^{(i)} = \text{gr}(a_\alpha^i, \{b_{p,i}^\alpha \mid p \in S_\alpha\} : pb_{p,i}^\alpha = a_\alpha^i),$$

и положим

$$A_\alpha = \bigoplus_{i \in \omega} A_\alpha^{(i)}, \quad A_S = \bigoplus_{\alpha < \beta} A_\alpha.$$

Тогда справедлива

ЛЕММА 4. *Группа $A \rightleftharpoons A_S$ вычислимо $S\Sigma$ -порождена множеством $A_0 = \{a_\alpha^i \mid \alpha < \beta, i \in \omega\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в проверке условия 1, 2', 3, 5 определения вычислимой $S\Sigma$ -порожденной модели.

1. Пусть дана конечная последовательность $\bar{a} = \langle a_{\alpha_0}^{t_0}, \dots, a_{\alpha_{n-1}}^{t_{n-1}} \rangle \in (A_0^{<\omega})_{\neq}$. Определим множество

$$S_{\bar{a}} = S_{\alpha_0} \oplus \dots \oplus S_{\alpha_{n-1}} \oplus \omega.$$

Легко проверить, что условие 1 выполнено.

2'. Пусть $[\] : \omega^{<\omega} \rightarrow \omega$ эффективная нумерация конечных последовательностей натуральных чисел и даны числа n и $r = [u_0, \dots, u_{n-1}, m]$ такие, что $D_{u_i} \subseteq P$, $i < n$, $m \in \omega$. Для каждого $i < n$ определим группу

$$B_i^r = gr(b_i, \{c_p^i \mid p \in D_{u_i}\} : pc_p^i = b_i)$$

и положим

$$M_r^n = \bigoplus_{i < n} B_i^r \bigoplus Z^m, \quad \bar{b} = \langle b_0, \dots, b_{n-1} \rangle, \\ S_r^n = D_{u_0} \oplus \dots \oplus D_{u_{n-1}} \oplus \{m\},$$

где Z^m - прямая сумма m экземпляров бесконечной циклической группы.

Легко проверить, что отображение $f : b_i \rightarrow a_{\alpha_i}^{t_i}$, $i < n$, можно продолжить до изоморфного вложения модели $\langle M_r^n, \bar{b} \rangle$ в $\langle A, \bar{a} \rangle$ тогда и только тогда, когда $S_r^n \subseteq S_{\bar{a}}$.

3. Пусть дана последовательность элементов $\bar{a} = \langle a_{\alpha_0}^{t_0}, \dots, a_{\alpha_{n-1}}^{t_{n-1}} \rangle \in (A_0^{<\omega})_{\neq}$ и конечно порожденная подгруппа $A' \subseteq A$, содержащая элементы $a_i \rightleftharpoons a_{\alpha_i}^{t_i}$. Для каждого $i < n$ определим множество

$$R^i \rightleftharpoons R_{A'}^i = \{p \in P \mid A' \models \exists y(py = a_i)\}.$$

Пусть $R^i = \{p_0^i, \dots, p_{l_i-1}^i\}$ и для любого $j < l_i$ число u_i и элемент b_j^i такие, что

$$D_{u_i} = R^i, \quad p_j^i b_j^i = a_i.$$

Обозначим через A'' подгруппу, порожденную множеством $\{b_j^i, a_i \mid j < l_i, i < n\}$. Легко понять, что подгруппа A'' сервантна в A' , а потому $A' = A'' \bigoplus B$ для некоторой конечно порожденной подгруппы B . По основной теореме о конечно порожденных абелевых группах существует такое число m , что группы B и Z^m изоморфны. Пусть $r = [u_0, \dots, u_{n-1}, m]$. Тогда $S_r^n \subseteq S_{\bar{a}}$ и группы $\langle A', \bar{a} \rangle$ и $\langle M_r^n, \bar{b} \rangle$ изоморфны.

5. Любой элемент группы A линейно зависит от последовательности $\langle a_\alpha^i \mid \alpha < \beta, i \in \omega \rangle$. Отсюда легко следует, что условие 5 справедливо. \square

Из леммы 4 и следствия 1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 7. Множество $M \subseteq \omega$ является Σ -определимым в наследственно конечном допустимом множестве $\mathbb{H}\mathbb{F}(A_S)$ над группой A_S тогда и только тогда, когда существует последовательность $\bar{a} \in (A_0^{<\omega})_{\neq}$ такая, что $M \leq_e S_{\bar{a}}$.

ТЕОРЕМА 2. Для любого e -идеала I существует абелева группа без кручения A такая, что I^* совпадает с семейством всех Σ -подмножеств натуральных чисел в $\mathbb{H}\mathbb{F}(A)$. Кроме того, эту группу можно выбрать так, что $\text{card}(A) = \text{card}(I^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дан e -идеал I и $I^* = \{S_\alpha \subseteq \omega \mid \alpha < \beta\}$. Для любого $\alpha < \beta$ определим множество $S'_\alpha = \{p_x \mid x \in S_\alpha\}$, где p_x — x -ое простое число и положим $I' = \{S'_\alpha \mid \alpha < \beta\}$, $A = A_{I'}$, где группа A построена по I' как перед леммой 4. Покажем, что группа A требуемая. Из построения группы A следует, что для любого $\alpha < \beta$ и $i \in \omega$ справедливо равенство

$$S'_\alpha = \{p \mid A \models \exists y(py = a_\alpha^i)\}.$$

Отсюда множество S'_α , а следовательно и S_α , Σ -определимы в $\mathbb{H}\mathbb{F}(A)$. Пусть дано Σ -подмножество $M \subseteq \omega$ в $\mathbb{H}\mathbb{F}(A)$. По следствию 7 существуют число n и последовательность $\bar{a} \in (A_0^n)_{\neq}$, такие что

$$M \leq_e S_{\bar{a}} = S_{\alpha_0} \oplus \dots \oplus S_{\alpha_{n-1}} \oplus \omega.$$

Так как $S'_{\alpha_i} \in I^*$, то и $S_{\bar{a}} \in I^*$. Отсюда имеем $M \in I^*$. \square

СЛЕДСТВИЕ 8. Пусть дан e -идеал I и по нему построена группа A также как в теореме 2. Тогда семейство множеств натуральных чисел S вычислимо в $\mathbb{H}\mathbb{F}(A)$ тогда и только тогда, когда $S \cup \{\emptyset\}$ представимо в виде

$$\{\Theta_i(R, B) \mid i \in \omega, R \in I^*\}$$

для некоторой вычислимой последовательности операторов перечисления Θ_i и $B \in I^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и для следствия 6 докажем необходимость. Пусть семейство S вычислимо. Тогда из теоремы 1 следует

$$S \cup \{\emptyset\} = \{\Theta_i^1(S_{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle}) \mid i \in \omega, \bar{a} \in (A_0^{m_i})_{\neq}, a_i \neq b_k\}$$

для некоторой вычислимой последовательности операторов перечисления Θ_i^1 , $\bar{b} \in (A_0^t)_{\neq}$ и функция $m(i) = m_i$ вычислима. Из доказательства леммы 4 существует вычислимая последовательность операторов перечисления Θ_i^2 такая, что

$$S \cup \{\emptyset\} = \{\Theta_i^2(S'_{\alpha_0} \oplus \dots \oplus S'_{\alpha_{m_i-1}}, B'_0 \oplus \dots \oplus B'_{t-1} \otimes \omega) \mid S'_{\alpha_j} \in I', \\ j < m_i, i \in \omega\}.$$

Так как $S'_{\alpha_0} \oplus \dots \oplus S'_{\alpha_{m_i-1}} \equiv_m S_{\alpha_0} \oplus \dots \oplus S_{\alpha_{m_i-1}}$, где $S_{\alpha_j} = \{x \mid p_x \in S'_{\alpha_j}\}$, $j < m_i$, и $I^* = \{S_{\alpha_0} \oplus \dots \oplus S_{\alpha_{m_i-1}} \mid S_{\alpha_j} \in I^*\}$, то существует вычислимая последовательность операторов перечисления Θ_i такая, что

$$S \cup \{\emptyset\} = \{\Theta_i(R, B'_0 \oplus \dots \oplus B'_{t-1} \otimes \omega) \mid R \in I^*, i \in \omega\}.$$

□

Пусть e -идеал I порождается тотальными e -степенями и не является главным, $I^* = \{S_\alpha \mid S_\alpha \neq \emptyset, \alpha < \beta\}$ и группа $A = A_I$ построена как в доказательстве теоремы 2. Также как и в [1] для группы A можно показать, что справедливо

СЛЕДСТВИЕ 9. *Существует вполне разложимая абелева группа без кручения A такая, что в наследственно конечном допустимом множестве $\mathbb{HF}(A)$ не существует универсальной Σ -функции.*

Пусть дано подмножество $S \subseteq P$ простых чисел. По множеству S определим группу $G \rightleftharpoons G_S = \bigoplus \{Z_p \mid p \in S\}$. В каждой группе Z_p зафиксируем элемент $a_p \neq 0$ и пусть $G_0 = \{a_p \mid p \in S\}$.

ЛЕММА 5. *Группа G вычислимо $S\Sigma$ -порождена множеством G_0 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в проверке условий 1, 2', 3, 5 определения вычислимо $S\Sigma$ -порожденной модели.

1. Для любой последовательности $\bar{a} = \langle a_{p_0}, \dots, a_{p_{n-1}} \rangle \in (G_0^{<\omega})_{\neq}$ положим

$$S_{\bar{a}} = \{[p_0, \dots, p_{n-1}, q_0, \dots, q_{m-1}] \mid \bar{q} \in (S^{<\omega})_{\neq}, p_i \neq q_j, i < n, j < m\}.$$

Легко проверить, что множество S , а следовательно и множество $S_{\bar{a}}$, Σ -определимы в $\mathbb{HF}(G)$.

2'. Пусть даны числа n и r такие, что $r = [p_0, \dots, p_{n-1}, q_0, \dots, q_{m-1}]$, где $\langle p_0, \dots, p_{n-1}, q_0, \dots, q_{m-1} \rangle$ последовательность попарно различных простых чисел. Положим

$$G_r^n = \bigoplus \{Z_{p_i} \mid i < n-1\} \oplus \bigoplus \{Z_{q_j} \mid j < m-1\},$$

$$S_r^n = \{[p_0, \dots, p_{n-1}, q_0, \dots, q_{m-1}]\}.$$

Пусть $Z_{p_i} = (b_{p_i})$. Ясно, что модель $\langle G_r^n, \bar{b} \rangle$, $\bar{b} = \langle b_{p_0}, \dots, b_{p_{n-1}} \rangle$, вложима в $\langle G, \bar{a} \rangle$ тогда и только тогда, когда $S_r^n \subseteq S_{\bar{a}}$.

3. Пусть $\langle G', \bar{a} \rangle$, $\bar{a} = \langle a_{p_0}, \dots, a_{p_{n-1}} \rangle \in (G_0^n)_{\neq}$ — некоторая конечно порожденная подгруппа в $\langle G, \bar{a} \rangle$. Обозначим через $H_0 \subseteq G'$ подгруппу, порожденную элементами $a_i \rightleftharpoons a_{p_i}$, $i < n$. Тогда существует такая последовательность простых чисел q_0, \dots, q_{m-1} , что $G' = H_0 \oplus Z_{q_0} \oplus \dots \oplus Z_{q_{m-1}}$.

Пусть число $r = [p_0, \dots, p_{n-1}, q_0, \dots, q_{m-1}]$. Тогда модель $\langle G_r^n, \bar{b} \rangle$, определенная в пункте 2, изоморфна $\langle G', \bar{a} \rangle$, и $S_r^n \subseteq S_{\bar{a}}$, то есть справедливость условия 3 установлена.

5. Для любого числа $r = [m_0, \dots, m_{n-1}, p_0, \dots, p_{n-1}]$, $m_i \in \omega$, $p_i \in P$, $m_i < p_i$, $p_i \neq p_j$, $i < j < n$, определим формулу

$$\varphi_r^n(x, x_0, \dots, x_{n-1}) \Rightarrow (x = m_0x_0 + \dots + m_{n-1}x_{n-1}) \ \& \bigwedge_{i < n} (x_i \neq 0 \ \& \ p_ix_i = 0).$$

Легко проверить, что для любого элемента $x \in G$ существует такое число r , что формула $\varphi_r(x, a_{p_0}, \dots, a_{p_{n-1}})$ определяет элемент x в $\mathbb{H}\mathbb{F}(G)$, и для любой последовательности $\bar{a} \in G_0$ множество $\varphi_r^{(G, \bar{a})}[x, \bar{a}]$ не более, чем одноэлементно.

Таким образом, все условия определения вычислимо $S\Sigma$ -порожденной модели для группы G и множества G_0 выполнены. \square

СЛЕДСТВИЕ 10. Пусть $S \subseteq P$ и группа $G = \bigoplus \{Z_p \mid p \in S\}$. Множество $A \subseteq \omega$ Σ -определимо в $\mathbb{H}\mathbb{F}(G)$ тогда и только тогда, когда $A \leq_e S$. Идеал $I_e(G)$ является главным.

Действительно, по лемме 5 и следствию 1 существует последовательность $\bar{a} \in (G_0^{<\omega})_{\neq}$ такая, что $A \leq S_{\bar{a}}$. Отсюда и из $S_{\bar{a}} \leq_e S$ следует, что $A \leq_e S$. Множество S является Σ -определимым в $\mathbb{H}\mathbb{F}(G)$. Следовательно $d_e(S) \in I_e(G)$. Поэтому идеал $I_e(G)$ является главным.

СЛЕДСТВИЕ 11. Для любого главного e -идеала I существует периодическая абелева группа G такая, что $I_e(G) = I$.

Действительно, пусть множество $S \subseteq P$ такое, что $I = \widehat{d_e(S)}$. Тогда по следствию 10 группа $G \models G_S$ требуемая.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функцию $U_\omega(x_0, x_1)$ будем называть строго универсальной числовой функцией в наследственно конечном допустимом множестве $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$, если семейство всех одноместных числовых Σ -функций $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$ представимо в виде:

$$\{U_\omega(x_0, x_1) \mid x_0 \in \omega\}.$$

ЛЕММА 6. [10] Существует главный e -идеал, что в I не существует универсальной функции для класса одноместных функций из I .

Отсюда и следствия 11 получаем

СЛЕДСТВИЕ 12. Существует периодическая абелева группа G такая, что в $\mathbb{H}\mathbb{F}(G)$ не существует строго универсальной числовой Σ -функции.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Существует модель \mathfrak{M} такая, что в $\mathbb{H}\mathbb{F}(\mathfrak{M})$ нет универсальной функции, но имеется строго универсальная числовая Σ -функция.

Действительно, в [11] построена такая сильно конструктивизируемая модель \mathfrak{M} , что в $\mathbb{HIF}(\mathfrak{M})$ нет универсальной Σ -функции. По следствию 3 имеем $I_e(\mathfrak{M}) = 0$. Поэтому в $I_e(\mathfrak{M})$ существует универсальная числовая функция. Следовательно, в $\mathbb{HIF}(\mathfrak{M})$ имеется строго универсальная числовая функция, то есть \mathfrak{M} требуемая.

Список литературы

- [1] А. С. Морозов, В. Г. Пузаренко, О Σ -подмножествах натуральных чисел, Алгебра и Логика (сдана в печать).
- [2] В. А. Руднев, О существовании неотделимой пары в рекурсивной теории допустимых множеств, Алгебра и логика, **27**, № 1, 1987, 48—56.
- [3] В. Г. Пузаренко, О вычислимости над моделями разрешимых теорий, Алгебра и логика, **39**, № 2, 2000, 170—197.
- [4] А. С. Морозов, Σ -подмножество натуральных чисел, не перечислимое с помощью натуральных чисел, Сибирский математический журнал, **41**, №6, 2000, 1404—1408.
- [5] А. Н. Хисамиев, О верхней полурешетке Ершова, Сибирский математический журнал, **45**, №1, 2004, 211—228.
- [6] J. Barwise, Admissible sets and structures, Berlin, Springer-Verlag, 1975.
- [7] Ю. Л. Ершов, Определимость и вычислимость. Новосибирск: научная книга, 1996. (Сибирская школа алгебры и логики).
- [8] Х. Роджерс, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, Москва, Мир, 1972.
- [9] М. И. Каргаполов, Ю. Л. Мерзляков, Основы теории групп, М., Наука, 1982.
- [10] И. Калимуллин, В. Пузаренко, О вычислимости на структурах, Сборник трудов Института Математики СО РАН (сдана в печать).
- [11] В. А. Руднев, Об универсальной рекурсивной функции на допустимых множествах, Алгебра и логика, **25**, № 4, 1986, 425—436.

Адрес автора:

Хисамиев Асылхан Назифович,
РОССИЯ,
630090, г. Новосибирск,
просп. Ак. Коптюга, 4,
Институт математики СО РАН
e-mail: hisamiev@math.nsc.ru