УДК 512.540+510.5

О квазирезольвентных моделях *

А.Н.Хисамиев

В монографии Ю. Л. Ершова [1] введено важное понятие квазирезольвентного допустимого множества и доказаны:

1. Если $\mathfrak{M}$ – модель регулярной (т.е. разрешимой и модельно полной) теории, то наследственно конечное допустимое множество $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ является квазирезольвентным;

2. В квазирезольвентных допустимых множествах существует универсальная Σ-функция.

По аналогии с этим понятием в [2] дано определение квазирезольвентной модели и доказано, что модель $\mathfrak{M}$ конечной сигнатуры квазирезольвентна тогда и только тогда, когда наследственно конечное допустимое множество $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ квазирезольвентно. Поэтому представляет интерес исследование квазирезольвентных моделей. В данной работе введены понятия 1-квазирезольвентной модели и установлены связи между квазирезольвентными и 1-квазирезольвентными моделями. Получены достаточные условия 1-квазирезольвентности и не квазирезольвентности модели. Описаны квазирезольвентные алгебры Ершова (теорема 2.2) и абелевы p-группы (теорема 3.3). Из этих теорем следуют: 1) алгебра Ершова (абелева p-группа) квазирезольвентна тогда и только тогда, когда она 1-квазирезольвентна; 2) если алгебра Ершова (абелева p-группа) квазирезольвентна, то некоторое ее обогащение конечным числом констант является моделью регулярной теории.

Мы придерживаемся терминологии и обозначении по допустимым множествам [1], теории моделей [3, 4], алгебрам Ершова [5, 6] и группам [7]. В дальнейшем рассматриваются модели конечных сигнатур.

Автор выражает благодарность С.С. Гончарову за внимание и поддержку в работе и рецензенту за замечания, которые помогли улучшить изложение работы.

§1. 1-квазирезольвентные модели.

Пусть $\mathfrak{M}$ – модель конечной сигнатуры σ, $\sigma_1 = \sigma \cup \langle \emptyset, \in, U^1 \rangle$ и $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ – наследственно конечное допустимое множество над моделью $\mathfrak{M}$. Зафиксируем геделеву нумерацию Γ всех формул сигнатуры σ_1. Через Φ_n будем обозначать формулу с номером n. Пусть дана формула Φ

*Частично поддержано грантами РФФИ №02-01-00593, INTAS-00-499 и Минобразования PD02-1.1-201.

сигнатуры σ и конечная последовательность $\bar{a} = \langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle$ элементов из M. Через $FV(\Phi)$ обозначается множество всех свободных переменных формулы Φ. Пусть $FV(\Phi) = \{x_0, \ldots, x_{m-1}\}$. Если $m \leq n$, то $\Phi(\bar{a}) = (\Phi)^{x_0,\ldots,x_{m-1}}_{a_0,\ldots,a_{m-1}}$ получена из формулы Φ подстановкой вместо x_i элементов a_i. Если же $m > n$, то $\Phi(\bar{a})$ есть $\exists x(x \neq x)$. Определим 2-х местный предикат $Tr^1_{\mathfrak{M}}$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ положив

$$Tr^1_{\mathfrak{M}}(n, \bar{a}) = \{\langle n, \bar{a}\rangle \mid \mathfrak{M} \models \Phi_n(\bar{a}), n \in \omega, \bar{a} \in M^{<\omega}\},$$

где $\Phi_n(\bar{x})$ – формула сигнатуры σ номера n, $M^{<\omega}$ – множество всех конечных последовательностей элементов из M.

В [2] введено понятие квазирезольвентной модели.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 [2] *Модель $\mathfrak{M}$ называется квазирезольвентной, если существует последовательность подмножеств $M_n \subseteq M$, $n \in \omega$ (квазирезольвента) такая, что*

1. $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots$,

2. $\bigcup M_i = M$,

3. Предикаты $P = \{\langle n, a\rangle \mid a \in M_n\}$, $Tr_{\mathfrak{M}} = \{\langle n, m, \bar{a}\rangle \mid M_n \models \Phi_m(\bar{a}), \bar{a} \in M_n^{<\omega}\}$ являются Δ-предикатами в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

Введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2 *Модель $\mathfrak{M}$ назовем 1-квазирезольветной, если предикат $Tr^1_{\mathfrak{M}}$ является Δ-предикатом в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.*

Отсюда и определения 1.1 следуют

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1 *Модель $\mathfrak{M}$ 1-квазирезольвентна тогда и только тогда, когда квазирезольвенту можно выбрать так, что все множества последовательности M_n, $i \in \omega$ в определении 1.1 равны множеству M, то есть существует квазирезольвента длины* 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2 *Из доказательства теоремы* 3.5.1 [1, стр. 230] *следует, что любая модель регулярной теории 1-квазирезольвентна.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1 *Стандартная модель арифметики $\Omega = \langle \omega, 0, s, +, \cdot, \leq\rangle$ является квазирезольвентной, но не 1-квазирезольвентной моделью.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко понять, что модель Ω резольвентна, а поэтому и квазирезольвентна. Несправедливость 1-квазирезольвентности непосредственно следует из нетривиальности арифметической иерархии и того, что любое Σ-подмножество $A \subseteq \omega$ в $\mathbb{HF}(\Omega)$ является вычислимо перечислимым множеством [1]. $\square$

Приведем пример резольвентной периодической абелевой группы, которая не 1-квазирезольвентна.

Пусть S – вычислимо перечислимое, но не вычислимое множество простых чисел и $G = \bigoplus\{C_p \mid p \in S\}$, где C_p – циклическая группа порядка p. Легко проверить, что группа G, а следовательно наследственно конечное допустимое множество $\mathbb{HF}(G)$, являются вычислимыми моделями. Как и в предложении 2 [8] можно доказать, что группа G резольвентна. Покажем, что группа G не является 1-квазирезольвентной.

Допустим противное, то есть она 1-квазирезольвентна. Для любого простого числа p через $\Phi_{f(p)}$ обозначим формулу $\exists x(x \neq 0 \ \& \ px = 0)$. Тогда справедливы эквивалентности:

$$p \in S \Leftrightarrow G \models \Phi_{f(p)} \Leftrightarrow \mathbb{HF}(G) \models Tr^1_G(f(p), 0).$$

Так как $Tr^1_G(f(p), 0)$ является Δ-предикатом, а $\mathbb{HF}(G)$ – вычислимая модель, то множество S вычислимо. Противоречие.

Приведем одно достаточное условие, когда квазирезольвентная модель является 1-квазирезольвентной.

ТЕОРЕМА 1.1 *Если модель $\mathfrak{M}$ квазирезольвентна и счетно-категорична, то модель $\mathfrak{M}$ 1-квазирезольвентна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последовательность подмножеств $M_i \subseteq M$, $i \in \omega$ является квазирезольвентой модели $\mathfrak{M}$. Тогда существуют последовательность элементов $\bar{b} \in M^{<\omega}$ и Σ-формула $\Phi(n, x, \bar{b})$ такие, что справедлива эквивалентность:

$$x \in M_n \Leftrightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Phi(n, x, \bar{b}).$$

Используя известный метод представления Σ-формулы сигнатуры σ_1 в виде дизъюнкции вычислимой последовательности $\exists$-формул сигнатуры σ и теорему Рылль-Нардзевского 2.3.13 [4], легко понять, что существует $\exists$-формула $\Psi_n(x, \bar{b})$ сигнатуры $\langle \sigma, \bar{b} \rangle$ такая, что для любого элемента $c \in M$ справедлива эквивалентность:

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Phi(n, c, \bar{b}) \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \Psi_n(c, \bar{b}).$$

Так как модель $\mathfrak{M}$ счетно-категорична, то существует такое число r, что для любого $s \geq r$ в модели $\mathfrak{M}$ истинна формула

$$(\Psi_s(x, \bar{b}) \equiv \Psi_0(x, \bar{b})) \vee \ldots \vee (\Psi_s(x, \bar{b}) \equiv \Psi_{r-1}(x, \bar{b})).$$

Отсюда все множества $M_{r+i} = M, i \in \omega$. Следовательно модель $\mathfrak{M}$ является 1-квазирезольвентной. $\square$

Из докательства теоремы 1.1 непосредственно следует

СЛЕДСТВИЕ 1.1 *Если модель $\mathfrak{M}$ квазирезольвентна и счетно-категорична, то существует конечное константное обогащение $\langle \mathfrak{M}, \bar{a} \rangle$ модели $\mathfrak{M}$ такое, что теория $Th(\langle \mathfrak{M}, \bar{a} \rangle)$ модельно полна.*

Приведем одно достаточное условие 1-квазирезольвентности модели.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2 *Пусть для модели $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ справедливы условия:*

1. Теория $T = Th(\mathfrak{M})$ модельно полна.

2. Множество номеров A аксиом теории T является Σ-множеством в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

Тогда модель $\mathfrak{M}$ 1-квазирезольвентна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $Tr^1_{\mathfrak{M}}$ является Δ-предикатом. Из условия 2 следует, что

$$\Gamma^{-1}(T) \in \Delta(\mathbb{HF}(\mathfrak{M})). \tag{1}$$

Через B и C обозначим соответственно множество всех формул и Σ-формул сигнатуры σ. Из (1) следует, что

$$E = \{\langle m, s \rangle \mid \forall \bar{x}(\Phi_m(\bar{x}) \equiv \Phi_s(\bar{x})) \in T,\ m \in B,\ s \in C\}$$

также является Δ-предикатом в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

В силу условия 1 имеем

$$Tr^1_{\mathfrak{M}}(m, \bar{a}) \Leftrightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models m \in B \ \&\ \exists s(\langle m, s \rangle \in E \ \&\ Tr_\Sigma(s, \bar{a})),$$

$$\neg Tr^1_{\mathfrak{M}}(m, \bar{a}) \Leftrightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models m \notin B \ \vee\ \exists s(\langle g(m), s \rangle \in E \ \&\ Tr_\Sigma(s, \bar{a})),$$

где $\Phi_{g(m)} = \neg \Phi_m$.

Отсюда имеем $Tr^1_{\mathfrak{M}} \in \Delta(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}))$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3 *Условие 2 является необходимым для 1-квазирезольвентности модели.*

Приведем пример 1-квазирезольвентной модели, у которой любое конечное константное расширение не является моделью регулярной теории. Пусть $S \subseteq \omega$ – бесконечное подмножество и сигнатура $\sigma = \langle f^1 \rangle$. Пусть теория T_S определяется следующим множеством аксиом $Ax \leftrightharpoons Ax_S$.

$$1.\ \forall x \exists z (f(z) = x)$$

$$2.\ \forall z_1 \forall z_2 (f(z_1) = f(z_2) \to z_1 = z_2)$$

$$3_{n\in S}.\ \exists x(f^n(x)=x)\ \&\ \bigwedge_{\substack{i,j<n,\\ i\neq j}} (f^i(x)\neq f^j(x))$$

$$4_{n\notin S}.\ \forall x(f^n(x)\neq x)\vee \bigvee_{\substack{i,j<n,\\ i\neq j}} (f^i(x)=f^j(x))$$

$$5_{n\in\omega}.\ \forall x\forall y(f^n(x)=x\ \&\ f^n(y)=y\rightarrow \bigvee_{s\leq n} y=f^s(x)),$$

где $f^n=\underbrace{f(f(\ldots(f(x)\ldots)))}_{\text{n-раз}}$.

Легко проверить, что теория T_S $\forall\exists$-аксиоматизируемая и несчетно категорична. По теореме Линдстрема 3.1.12 [4] она модельно полна. Тогда из предложения 1.2 получаем

СЛЕДСТВИЕ 1.2 *Модель $\mathfrak{M}$ теории T_S 1-квазирезольвентна тогда и только тогда, когда S является Δ-предикатом в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.*

СЛЕДСТВИЕ 1.3 *Существует 1-квазирезольвентная модель такая, что любое ее конечное константное расширение не является моделью регулярной теории.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть множество S является дополнением до вычислимо перечислимого, но не вычислимого множества и $\mathfrak{M}$ – некоторая модель теории T_S. Легко проверить, что $S\in\Delta(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}))$. Отсюда по следствию 1.2 модель $\mathfrak{M}$ 1-квазирезольвентна. По выбору множества S любое конечное константное расширение модели $\mathfrak{M}$ не является моделью регулярной теории. □

Приведем одно достаточное условие не квазирезольвентности модели. Будем говорить, что модель $\mathfrak{N}$ Σ^0_1-подмодель модели $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{N}\preceq_1\mathfrak{M}$), если $\mathfrak{N}\subseteq\mathfrak{M}$ и для любой $\exists$-формулы $\varphi(\bar{x})$ и любой последовательности $\bar{a}\in N^{<\omega}$ справедлива эквивалентность:

$$\mathfrak{N}\models\varphi(\bar{a})\Leftrightarrow\mathfrak{M}\models\varphi(\bar{a}).$$

Введем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3 *Пусть для модели $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ справедливо условие: для любой конечной последовательности элементов $\bar{a}\in M^{<\omega}$ существуют Π^0_1-формула $\Theta_{\bar{a}}(\bar{x})$ без параметров сигнатуры σ, Σ^0_1-подмодель $\mathfrak{N}$ модели $\mathfrak{M}$, $\bar{a}\in N^{<\omega}$, вложение $f:\mathfrak{N}\rightarrow\mathfrak{N}$ модели $\mathfrak{N}$ в себя и последовательность элементов $\bar{b}\in N^{<\omega}$ такие, что:*

$$f\restriction\bar{a}=id, \tag{2}$$

$$\mathfrak{N} \models \Theta_{\bar{a}}(\bar{b}) \wedge \neg\Theta_{\bar{a}}(f\bar{b}). \tag{3}$$

Тогда модель $\mathfrak{M}$ назовем E-разделяющейся моделью (или ER-моделью).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3 *Любая ER-модель не квазирезольвентна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $\mathfrak{M}$ является ER-моделью и она квазирезольвентна. Пусть последовательность $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots$ является ее квазирезольвентой. Тогда существует Σ-формула $\Psi(n, m, x, \bar{a})$ сигнатуры $\sigma_1 = \sigma \cup \langle \emptyset, \in, U \rangle$ такая, что для любых $n, m \in \omega$ и $\bar{b} \in M_n^{<\omega}$ справедлива эквивалентность:

$$\mathfrak{M} \upharpoonright M_n \models \Phi_m(\bar{b}) \Leftrightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Psi(n, m, \bar{b}, \bar{a}), \tag{4}$$

где $\Phi_m(\bar{x})$ – формула без параметров сигнатуры σ номера m. Пусть символы $\Theta_{\bar{a}}, \mathfrak{N}, f, \bar{b}$ означают тоже, что и в определении 1.3 и $\Theta_{\bar{a}} = \Phi_m(\bar{x}) = \forall\bar{y}\Phi_m^0(\bar{x}, \bar{y})$.

Из (3) следует, что существует такая последовательность $\bar{c} \in N^{<\omega}$, что

$$\mathfrak{N} \models \neg\Phi_m^0(f\bar{b}, \bar{c}). \tag{5}$$

Из (5) и $\mathfrak{N} \preceq_1 \mathfrak{M}$ получаем

$$\mathfrak{M} \models \neg\Phi_m^0(f\bar{b}, \bar{c}). \tag{6}$$

Пусть число n такое, что $\bar{a}, \bar{b}, f\bar{b}, \bar{c} \in M_n^{<\omega}$. Тогда из (3), (6) имеем

$$\mathfrak{M} \upharpoonright M_n \models \Phi_m(\bar{b}) \& \neg\Phi_m(f\bar{b}). \tag{7}$$

Из (4), (7) получим

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Psi(n, m, \bar{b}, \bar{a}). \tag{8}$$

Из представления Σ-формулы сигнатуры σ_1 в виде дизъюнкции вычислимой последовательности $\exists$-формул сигнатуры σ получаем: если $\mathfrak{N} \preceq_1 \mathfrak{M}$, то

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \preceq_1 \mathbb{HF}(\mathfrak{M}). \tag{9}$$

Отсюда и из (8) следует

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \Psi(n, m, \bar{b}, \bar{a}). \tag{10}$$

Так как вложение f модели $\mathfrak{N}$ можно расширить до вложения $\bar{f}$: $\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \to \mathbb{HF}(\mathfrak{N})$ и Ψ является Σ-формулой, то из (2), (10) имеем

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \Psi(n, m, f\bar{b}, \bar{a}). \tag{11}$$

Поскольку Ψ является Σ-формулой, используя (4), (7) и (9) получаем

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{N}) \models \neg\Psi(n, m, f\bar{b}, \bar{a}).$$

Получили противоречие с (11). Предложение доказано. $\square$

§ 2. Алгебры Ершова

Здесь будут описаны квазирезольвентные алгебры Ершова. Пусть даны алгебра Ершова $\mathfrak{A}$ и элемент $a \in \mathfrak{A}$. Будем использовать следующие обозначения: $\hat{a} = \{x \in \mathfrak{A} \mid x \leq a\}$, $a^{\perp}_{\mathfrak{A}}$ – ортогональное дополнение элемента a в алгебре $\mathfrak{A}$, $F(\mathfrak{A})$ – идеал Фреше, $F_*(\mathfrak{A})$ – суператомная часть алгебры $\mathfrak{A}$. Атомный элемент $b \in \mathfrak{A}$ такой, что $b \notin F(\mathfrak{A})$, назовем бесконечным атомным.

ЛЕММА 2.1 *Если счетная алгебра Ершова $\mathfrak{A}$ содержит бесконечный атомный элемент b, то для любой алгебры Ершова $\mathfrak{B}$ прямая сумма $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ является ER-моделью.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дана конечная последовательность элементов $\bar{a} \in C^{<\omega}$, $\bar{a} = \langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle$. Построим вложение $f : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ алгебры $\mathfrak{C}$ в себя такое, что $f \restriction \bar{a} = id$, $f \restriction \mathfrak{B} = id$ и f удовлетворяет условиям определения 1.3. Не умаляя общности рассуждения, можно считать, что $\bar{a} \in A^{<\omega}$. Пусть $c_0, \ldots, c_{m-1}$ – атомы подалгебры, порожденной элементами $a_0, \ldots, a_{n-1}$ и $a = a_0 \vee \ldots \vee a_{n-1}$. Тогда имеем

$$\mathfrak{A} = \hat{a} \oplus a^{\perp}_{\mathfrak{A}},\ \hat{a} = \widehat{c_0} \oplus \widehat{c_1} \oplus \ldots \oplus \widehat{c_{m-1}}. \tag{12}$$

Пусть $b_0 = b \wedge a$, $b_1 = b \setminus a$. Тогда $b = b_0 \vee b_1$ и один из элементов b_0, b_1 будет бесконечным атомным элементом. Рассмотрим возможные случаи.

1. Пусть b_0 – бесконечный атомный элемент. Тогда существует такое i, что $c \rightleftharpoons b \wedge c_i$ будет бесконечным атомным элементом. Пусть для определенности $i = 0$ и $c' = c_0 \setminus c$. Тогда имеем

$$\widehat{c_0} = \hat{c} \oplus \widehat{c'}.$$

Пусть $\{d_0, d_1, \ldots\}$ – множество всех атомов алгебры $\hat{c}$. Определим частичное вложение $h : \hat{c} \to \hat{c}$ положив

$$hd_0 = d_0 \vee d_1,\ hd_i = d_{i+1},\ i > 0.$$

Так как $\hat{c}$ – атомная булевая алгебра, то существует вложение $f : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$, продолжающее h и тождественное на $c^{\perp}_{\mathfrak{C}}$. Легко проверить, что $f \upharpoonright \bar{a} = id$, $f \upharpoonright \mathfrak{B} = id$ и, для формулы $\Phi(x) = \forall y(y < x \to y = 0)$ и элемента d_0, имеем: $\mathfrak{C} \models \Phi(d_0) \& \neg \Phi(fd_0)$, то есть $\mathfrak{C}$ является ER-моделью.

2. Пусть b_1 – бесконечный атомный элемент. Тогда $a^{\perp}_{\mathfrak{A}} = \widehat{b_1} \oplus (b_1 \vee a)^{\perp}_{\mathfrak{A}}$. Отсюда и из (12) имеем

$$\mathfrak{A} = \hat{a} \oplus \widehat{b_1} \oplus (b_1 \vee a)^{\perp}_{\mathfrak{A}}.$$

Тогда как и в случае 1 доказывается, что $\mathfrak{A}$ является ER-моделью. □

ЛЕММА 2.2 *Если $\mathfrak{A}$ – счетная специальная алгебра Ершова, а $\mathfrak{B}$ – произвольная алгебра алгебра Ершова, то прямая сумма $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ является ER-моделью.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.1 можно считать, что ординальный тип $\alpha(\mathfrak{A})$ алгебры $\mathfrak{A}$ равен 1. Пусть дана конечная последовательность элементов $\bar{a} \in C^{<\omega}$, $\bar{a} = \langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle$. Построим вложение $f : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ алгебры $\mathfrak{C}$ в себя такое, что $f \upharpoonright \bar{a} = id$, $f \upharpoonright \mathfrak{B} = id$ и f удовлетворяет условиям определения 1.3. Не умаляя общности рассуждения, можно считать, что $\bar{a} \in A^{<\omega}$. По предложению 10 [6] алгебра $\mathfrak{A}$ представима в виде $\mathfrak{A} = \sum\limits_i \mathfrak{A}_i$, где $\mathfrak{A}_i = \{0, \bar{1}_i\}$. Для элемента $a \in \mathfrak{A}$ через $a^{(i)}$ обозначим i-ую координату элемента a, то есть $a = (a^{(0)}, a^{(1)}, \ldots)$, где $a^{(i)} \in \mathfrak{A}_i$. Пусть число m наименьшее такое, что для любых чисел $i < n$, $j \geq m$ верно равенство $a_i^{(j)} = 0$. Легко проверить, что существует изоморфное вложение $f : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ такое, что $f(1_i) = 1_i$, $i < m$, $f(1_m) = 1_m \vee 1_{m+1}$, $f(1_{m+j}) = 1_{m+j+1}$, $j > 0$, $f \upharpoonright \mathfrak{B} = id$, где $1_s = (0, \ldots, \bar{1}_s, 0, \ldots)$. Также как и в конце доказательства леммы 2.1 проверяется, что f требуемое вложение. □

ЛЕММА 2.3 *Пусть $\mathfrak{A}$ счетная нормальная алгебра Ершова, суператомная часть $F_*(\mathfrak{A})$ которой отлична от нуля, а $\mathfrak{B}$ – произвольная алгебра Ершова. Тогда $F_*(\mathfrak{A})$ является Σ^0_1-подмоделью алгебры $\mathfrak{C} \rightleftharpoons \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дана произвольная последовательность элементов $\bar{a}_0 = \langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle \in F_*(\mathfrak{A})$. Для доказательства леммы достаточно показать, что для произвольной последовательности элементов $\bar{b} = \langle b_n, \ldots, b_{r-1} \rangle \in \mathfrak{C}$ существует последовательность элементов $\bar{a}_1 = \langle a_n, \ldots, a_{r-1} \rangle \in F_*(\mathfrak{A})$ такая, что подалгебры $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, порожденные соответственно элементами последовательностей $\bar{a}_0$, $\bar{b}$ и $\bar{a}_0$, $\bar{a}_1$ изоморфны. Покажем это. Пусть атомы подалгебры $\mathfrak{A}_0$ будут $c_0, \ldots, c_{s-1}$, а $c_0, \ldots, c_{t-1}$, $t \leq s$, – все атомы из $\hat{a}$, где $a \rightleftharpoons a_0 \vee \ldots \vee a_{n-1}$. Тогда $c_0, \ldots, c_{t-1} \in F_*(\mathfrak{A})$. Так как $F_*(\mathfrak{A})$ специальная алгебра Ершова, то найдутся в $F_*(\mathfrak{A})$ атомы $d_t, \ldots, d_{s-1} \in$

$a^{\perp}_{\mathfrak{A}}$. Через $\mathfrak{A}_1$ обозначим подалгебру, порожденную элементами $c_0, \ldots, c_{t-1}, d_t, \ldots, d_{s-1}$. Очевидно, что существует изоморфизм $\varphi : \mathfrak{A}_0 \to \mathfrak{A}_1$ такой, что $\varphi c_i = c_i$, $i < t$, $\varphi c_j = d_j$, $t \leq j < s$. Тогда элементы $a_j = \varphi b_j$, $n \leq j < r$ будут искомыми. □

ТЕОРЕМА 2.2 *Для алгебры Ершова $\mathfrak{A}$ эквивалентны следующие утверждения:*

1. $\mathfrak{A}$ 1-квазирезольвентна.

2. $\mathfrak{A}$ квазирезольвентна.

3. $\mathfrak{A}$ является прямой безатомной алгебры Ершова и конечной алгебры Ершова.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2) очевидно. Докажем (2) $\Rightarrow$ (3). Пусть $\mathfrak{A}$ квазирезольвентна и $\mathfrak{A}'$ некоторая ее счетная элементарная подмодель. Покажем, что для $\mathfrak{A}'$ справедливо условие 3. По предложению 14 [6] существует разложение

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}_0 \oplus \mathfrak{A}_1,$$

где $\mathfrak{A}_0$ – нормальная алгебра Ершова, а $\mathfrak{A}_1$ – суператомная алгебра Ершова. Если $\mathfrak{A}_1$ – бесконечна, то по леммам 2.1, 2.2 алгебра $\mathfrak{A}'$, а следовательно и алгебра $\mathfrak{A}$ будут ER-моделями. Отсюда по предложению 1.3 алгебра $\mathfrak{A}$ не квазирезольвентна. Поэтому алгебра $\mathfrak{A}_1$ конечна.

Рассмотрим нормальную алгебру $\mathfrak{A}_0$. Супeратомная часть $F_*(\mathfrak{A}_0)$ этой алгебры специальная. Если же $F_*(\mathfrak{A}_0) \neq 0$, то она бесконечна. Тогда из лемм 2.2, 2.3 следует, что алгебра $\mathfrak{A}'$, а следовательно и алгебра $\mathfrak{A}$ будут ER-моделями. Отсюда по предложению 1.3 алгебра $\mathfrak{A}$ не квазирезольвентна. Противоречие. Следовательно $F_*(\mathfrak{A}_0) = 0$, то есть $\mathfrak{A}_0$ безатомна. Таким образом для алгебры $\mathfrak{A}'$, а следовательно и для алгебры $\mathfrak{A}$, справедливо утверждение 3.

Докажем (3) $\Rightarrow$ (1). Пусть $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \bigoplus \mathfrak{A}_1$, где $\mathfrak{A}_0$ безатомна алгебра Ершова, а $\mathfrak{A}_1$ конечная алгебра Ершова . Рассмотрим алгебру $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1 \rangle$, которая является обогащением алгебры $\mathfrak{B}$ константами для элементов алгебры $\mathfrak{B}_1$. Тогда теория $Th(\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0 \rangle)$ разрешима и модельно полна, то есть $\langle \mathfrak{A}, \mathfrak{A}_0 \rangle$ является моделью регулярной теории. Отсюда по замечанию 1.2 алгебра Ершова $\mathfrak{A}$ 1-квазирезольвентна. □

Из доказательства теоремы 2.2 имеем

СЛЕДСТВИЕ 2.4 *Если алгебра Ершова квазирезольвентна, то некоторое ее обогащение конечным числом констант является моделью регулярной теории.*

Модель $\mathfrak{M}$ назовем квазижесткой, если орбита любого ее элемента конечна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4 [2, 9] *Если наследственно конечное допустимое множество $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ над моделью $\mathfrak{M}$ резольвентно, то существует такое обогащение конечным числом констант $\bar{c}$, что $\langle \mathfrak{M}, \bar{c} \rangle$ является квазижесткой моделью.*

СЛЕДСТВИЕ 2.5 *Не существует счетной резольвентной алгебры Ершова.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное, то есть алгебра Ершова $\mathfrak{A}$ резольвентна. Тогда она и квазирезольвентна и по теореме 2.2 изоморфна $\mathfrak{A}_0 \bigoplus \mathfrak{A}_1$, где $\mathfrak{A}_0$ – безатомная, а $\mathfrak{A}_1$ – конечная алгебры Ершова. Тогда алгебра $\mathfrak{A}$ не является квазижесткой, что противоречит предложению 2.4.

$\square$

§ 3. Абелевы p-группы

Здесь описаны квазирезольвентные абелевы p-группы. В данном параграфе под словом группа понимается абелева p-группа. Если G группа, то через G^ω обозначается прямая сумма ω экземпляров группы G, C_{p^n} – циклическая группа порядка p^n, C_{p^∞} – квазициклическая p-группа, $G[p] = \{x \mid px = 0\}$. Рангом группы G называется ранг векторного пространства $G[p]$.

ЛЕММА 3.4 *Если для абелевой p-группы G существуют числа $r, s \in \omega$, $0 < r < s$, такие, что*

$$G = G_0 \bigoplus G_1 \bigoplus G_2,\ G_0 \simeq C^\omega_{p^r},\ G_1 \simeq C^\omega_{p^s},$$

то G не квазирезольвентна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 1.3 достаточно доказать, что G является ER-моделью. Пусть дана конечная последовательность элементов $a_0, \ldots, a_{n-1} \in G$. Через H_0 обозначим подгруппу, порожденную этими элементами. Пусть $G_i = \bigoplus\limits_{j\in\omega}(a^i_j)$, $i < 2$, где $(a^0_j) \cong C_{p^r}$, $(a^1_j) \cong C_{p^s}$, $j \in \omega$, и число k наименьшее такое, что для любого элемента $x \in H_0$, если $x = x_0 + x_1 + x_2$, $x_j \in G_j$, $j < 3$, то выполнено $x_i \in G'_i$, где $G'_i \rightleftharpoons (a^i_0) \oplus \ldots \oplus (a^i_{k-1})$, $i < 2$. Тогда $H_0 \subseteq H_1 \rightleftharpoons G'_0 \bigoplus G'_1 \bigoplus G_2$. Легко проверить, что существует вложение f группы G в себя такое, что выполнены:

$$f \restriction H_1 = id,\ fa^0_k = p^{s-r}a^1_k,\ fa^0_{k+i} = a^0_{k+i},\ i > 0,\ fa^1_{k+j} = a^1_{k+j+1},\ j \geq 0.$$

Через $\Phi(x)$ обозначим формулу $\forall y \neg(py = x)$. Тогда имеем

$$G \models \Phi(a^0_k) \wedge \neg\Phi(fa^0_k).$$

Следовательно, группа G является ER-моделью. $\square$

ЛЕММА 3.5 *Если порядки элементов редуцированной части R абелевой p-группы G неограниченны в совокупности, то G не квазирезольвентна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дана последовательность $\bar{a}$ и G_0 счетная элементарная подмодель G, содержащая $\bar{a}$. Легко заметить, что редуцированная часть R_0 группы G_0 также неограниченна. Известно [8, стр. 83], что группа R_0, а следовательно и G_0 имеют прямое слагаемое

$$G'_0 = \bigoplus_{i\in\omega}(a_i),$$

где $(a_i) \simeq C_{p^{n_i}}$, $n_0 < n_1 < \ldots$. Тогда для некоторой подгруппы $G'_1 \subseteq G_0$ имеем $G_0 = G'_0 \bigoplus G'_1$. Пусть подгруппа H_0 определена как в лемме 3.4 и число k наименьшее такое, что для любого элемента $x \in H_0$, если $x = x_0 + x_1$, $x_i \in G'_i$, $i < 2$, то выполнено $x_0 \in \widehat{G_0}$, где $\widehat{G_0} \rightleftharpoons (a_0) \oplus \ldots \oplus (a_{k-1})$. Тогда $H_0 \subseteq H_1 \rightleftharpoons \widehat{G_0} \bigoplus G'_1$. Легко проверить, что существует вложение $f : G_0 \to G_0$ группы G_0 в себя такое, что выполнены:

$$f \restriction H_1 = id,\ fa_{k+i} = p^{n_{k+i+1}-n_{k+i}} a_{k+i+1},\ i \geq 0.$$

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству леммы 3.4.

$\square$

ЛЕММА 3.6 *Если для некоторого числа $n > 0$ абелева p-группа G имеет прямое слагаемое $G_0 \simeq C^{\omega}_{p^n} \bigoplus C^{\omega}_{p^\infty}$, то G не квазирезольвентна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть подгруппа H_0 определена как лемме 3.4 и

$$G_0 = \bigoplus_{i\in\omega}(a^0_i) \oplus \bigoplus_{i\in\omega} D_i,\ G = G_0 \bigoplus G_1,$$

где $(a^0_i) \simeq C_{p^n}$, $D_i \simeq C_{p^\infty}$, $i \in \omega$. В каждой подгруппе D_i выберем элемент d_i порядка p^n. Пусть число k наименьшее такое, что для любого элемента $x \in H_0$, если $x = x_0 + x_1 + x_2$, то выполнено $x_0 \in G'_0 \rightleftharpoons (a^0_0) \oplus \ldots \oplus (a^0_{k-1})$, $x_1 \in D' \rightleftharpoons D_0 \bigoplus \ldots \bigoplus D_{k-1}$, $x_2 \in G_1$. Тогда $H_0 \subseteq H_1 \rightleftharpoons G'_0 \bigoplus D' \bigoplus G_1$ и существует вложение $f : G \to G$ группы G в себя такое, что выполнены:

$$f \restriction H_1 = id,\ fa_k = d_k,\ fa_{k+i} = a_{k+i},\ i > 0,\ fd_{k+j} = d_{k+j+1},\ j \geq 0.$$

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству леммы 3.4.

$\square$

ТЕОРЕМА 3.3 *Пусть G – абелева p-группа, а R и D – ее соответственно редуцированная и делимая части. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

1. G 1-квазирезольветна.

2. G квазирезольветна.

3. Если ранг $r(D)$ подгруппы D больше или равен ω, то подгруппа R конечна. Если же ранг $r(D) < \omega$, то $R = R_0 \oplus R_1$, где R_0 конечна, и существует такое число $n \geq 0$, что $R_1 \simeq C^{\alpha}_{p^n}$ $(C^{\alpha}_{p^0} \rightleftharpoons 0)$, $\alpha \geq \omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2) очевидно. Из лемм 3.4—3.6 следует (2) $\Rightarrow$ (3). Докажем (3) $\Rightarrow$ (1). Пусть ранг $r(D) = \alpha$, $\alpha \geq \omega$. Тогда $G = R \bigoplus D$, где R – конечная группа, а $D \simeq C^{\alpha}_{P^{\infty}}$. Пусть пара $\langle G, R\rangle$ есть обогащение группы G константами для элементов подгруппы R. Тогда теория $Th(\langle G, R\rangle)$ разрешима и модельно полна [3, § 5]. Отсюда по замечанию 1.2 группа G 1-квазирезольвентна.

Пусть $r(D) < \omega$. Тогда по условию теоремы $R = R_0 \bigoplus R_1$, R_0 – конечная группа, $R_1 \simeq C^{\alpha}_{p^n}$, $n \geq 0$, $\alpha \geq \omega$. Пусть пара $\langle G, R_0\rangle$ есть обогащение группы G константами для элементов подгруппы R_0. Легко проверить, что теория $Th(\langle G, R_0\rangle)$ разрешима и модельно полна [3, § 5]. Отсюда группа G 1-квазирезольвентна. □

Из доказательства теоремы 3.3 имеем

СЛЕДСТВИЕ 3.6 *Если абелева p-группа квазирезольвентна, то некоторое ее обогащение конечным числом констант является моделью регулярной теории.*

Из предложения 2.4, как и в случае алгебр Ершова, следует

СЛЕДСТВИЕ 3.7 *Не существует счетной резольвентной абелевой p-группы.*

СЛЕДСТВИЕ 3.8 *Прямое произведение квазирезольвентных моделей может быть не квазирезольвентной моделью.*

Действительно, пусть $G_0 = C^{\omega}_{p}$, $G_1 = C^{\omega}_{p^2}$. По теореме 3.3 группы G_0, G_1 квазирезольвентны, а по лемме 3.4 группа $G_0 \bigoplus G_1$ не квазирезольветна. □

Список литературы

[1] Ю. Л. Ершов, Определимость и вычислимость. Новосибирск: научная книга, 1996. (Сибирская школа алгебры и логики).

[2] А. Н. Хисамиев, О квазирезольвентных моделях и B-моделях, Алгебра и Логика, 2001, **40**, №4, 484—500.

[3] Ю. Л. Ершов, Проблемы разрешимости и конструктивные модели, М., Наука, 1980.

[4] Г. Кейслер, Ч. Ч. Чэн, Теория моделей, М., Мир, 1977.

[5] С. С. Гончаров, Счетные булевы алгебры и разрешимость, Новосибирск: научная книга, 1996. (Сибирская школа алгебры и логики).

[6] Ю. Л. Ершов, Дистрибутивные решетки с относительными дополнениями, Алгебра и Логика, **18**, №6, 1979, 680—722.

[7] М. И. Каргаполов, Ю. Л. Мерзляков, Основы теории групп, М., Наука, 1982.

[8] А. Н. Хисамиев, О резольвентных и внутренне перечислимых моделях, Структурные и сложностные проблемы вычислимости (Вычислительные системы), выпуск 165, 1999, 31—35.

[9] В. Г. Пузаренко, О теории моделей на наследственно конечных надстройках, Алгебра и Логика, **41**, №2, 2002, 199—223.

[10] Л. Фукс, Бесконечные абелевы группы, том 2, М., Мир, 1977.

Адрес автора:
Хисамиев Асылхан Назифович,
РОССИЯ,
630090, г. Новосибирск,
просп. Ак. Коптюга, 4,
Институт математики СО РАН
e-mail: hisamiev@math.nsc.ru

РЕФЕРАТ

УДК 512.540+510.5

А.Н. Хисамиев. О квазирезольвентных моделях.

В данной работе введено понятие 1-квазирезольвентной модели и установлены связи между квазирезольвентными и 1-квазирезольвентными моделями. Получены достаточные условия 1-квазирезольвентности и не квазирезольвентности модели. Описаны квазирезольвентные алгебры Ершова и абелевы p-группы.