Российская академия наук

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК

том 388 № 4 2003 Февраль

Основан в 1933 г.
Выходит 3 раза в месяц
ISSN 0869-5652

...7997, ГСП-7, Москва В-485, Профсоюзная ул., д. 90, комн. 301
тел. 334-73-80

Москва
...тво "Наука"
...академическая
...а/Интерпериодика"

СОДЕРЖАНИЕ

Том 388, номер 4, 2003

CONTENTS

Volume 388, Number 4, 2003

English language translation of the mathematics, physics, chemistry, biological, and earth sciences sections of the journal are available from MAIK "Nauka/Interperiodica" (Russia).

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2003, том 388, № 4, с. 439–442

МАТЕМАТИКА

УДК 517.925.42

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ В ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

© 2003 г. М. И. Каменский, О. Ю. Макаренков, П. Нистри

Представлено академиком В.А. Ильиным 13.06.2002 г.

Поступило 17.06.2002 г.

В работе изучаются задача о периодических решениях и задача Коши для систем дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = \varepsilon\phi(t, x) + \psi(t, x), \qquad (1)$$

где ϕ, ψ: $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k$ непрерывны и T-периодичны по первой переменной, ε – малый положительный параметр.

Системы вида (1) являются классическим объектом теории уравнений с малым параметром и исследовались различными методами. Остановимся лишь на тех из них, которые непосредственно связаны с предлагаемыми результатами. В работах [5, 8, 9] такое исследование проводится при помощи теории вращения векторных полей или индекса Пуанкаре. При этом в задаче о T-периодических решениях обычно предполагается, что при $\varepsilon = 0$ система (1) имеет изолированное T-периодическое решение ненулевого топологического индекса, а задача Коши имеет единственное решение на некотором отрезке $[0, d]$, что влечет также отличие от нуля топологического индекса этого решения (см. [10]). Далее, применяя теоремы о непрерывной зависимости от параметра решений операторных уравнений (см., например, [9]), устанавливаются наличие при малых $\varepsilon \geq 0$ соответствующих решений системы (1) и их сходимость к изолированному ненулевого топологического индекса решению системы (1) при $\varepsilon = 0$. Отметим, что при этом для задачи Коши близость решений устанавливается на том же отрезке $[0, d]$, на котором предполагаются существование и единственность системы (1) при $\varepsilon = 0$. Другим методом исследования системы (1) является принцип усреднения Н.Н. Боголюбова–Н.М. Крылова (см. [2]). Для применения этого метода следует сначала свести систему (1) к стандартной форме

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x), \qquad (2)$$

где f – функция, T-периодическая по первой переменной. Исследование системы (2) также возможно на основании топологических методов, связанных с понятием векторных полей (см., например, [1, 6, 12, 14]). Для этого рассматривают вспомогательную систему

$$\dot{x} = \varepsilon f_0(x), \qquad (3)$$

где

$$f_0(\xi) = \frac{1}{T}\int_0^T f(s, \xi)d\tau, \quad \xi \in \mathbf{R}^k.$$

Изолированные состояния равновесия системы (3) ненулевого топологического индекса по отношению к полю $-f_0$ порождают T-периодические решения системы (2). Решения же задачи Коши для системы (2) близки к соответствующим решениям задачи Коши для системы (3) на отрезке длины порядка $\frac{1}{\varepsilon}$. Основным способом сведения системы (1) к стандартной форме (2) является замена переменных

$$z(t) = \Omega(0, t, x(t)), \qquad (4)$$

где через $\Omega(\cdot, t_0, \xi)$ обозначено решение системы (1) при $\varepsilon = 0$ с начальным условием $x(t_0) = \xi$ и которую для применения принципа усреднения приходится предполагать T-периодической по t при T-периодических функциях x (см. [3, 13]).

В настоящей работе мы не требуем T-периодичности замены (4). Вместо него используем более слабое предположение о том, что начальные значения T-периодических решений системы (1) при $\varepsilon = 0$ заполняют границу некоторого открытого множества U в пространстве $\mathbf{R}^k$. В этих условиях T-периодические решения системы (1) при $\varepsilon = 0$ не являются изолированными, что исключает возможность непосредственного применения теорем

Воронежский государственный университет
University of Siena, Siena, Italy

о непрерывной зависимости от параметра решений соответствующих операторных уравнений. Важным для приложений примером такой ситуации является случай, специально рассматриваемый ниже, двумерной автономной при $\varepsilon = 0$ системы (1), имеющей изолированный цикл x_0. В этом случае в качестве U можно взять внутренность цикла x_0. Сложность задачи о существовании T-периодических решений у системы (1) состоит здесь в том, что множество T-периодических решений, порожденных циклом x_0, имеет, как показано в [4], нулевой топологический индекс.

В качестве системы, определяющей поведение решений системы (1) при малых $\varepsilon > 0$, в сообщении предлагается использовать линейную систему

$$\dot{y} = \phi(t, \Omega(t, 0, \xi)) + \psi'_{(2)}(t, \Omega(t, 0, \xi))y, \qquad (5)$$

где $\xi \in \mathbb{R}^k$. Из формулируемых ниже в терминах системы (5) результатов о свойствах решений системы (1) следуют классические результаты принципа усреднения для задачи о T-периодических решениях и задачи Коши, а также результат из [7] в случае, когда $\psi(t, x) = Ax$, где A – матрица, имеющая два простых собственных значения $\pm i\frac{T}{2\pi}$.

1. Рассмотрим сначала задачу о существовании T-периодических решений. Обозначим через $\eta(\cdot, s, \xi)$ решение системы (5) с начальным условием $y(s) = 0$. В этом разделе будет использовано классическое понятие вращения непрерывного отображения F: $\bar{U} \to \bar{U}$, заданного на замыкании ограниченного множества $U \subset \mathbb{R}^k$ (см. [9]). Эту величину будем обозначать через $\gamma(F, U)$.

Теорема 1. *Пусть множество $U \subset \mathbb{R}^k$ открыто и ограничено. Предположим, что выполнены следующие условия:*

(A0) $\Omega(T, 0, \xi) = \xi, \quad \xi \in \partial U$,

(A1) $\eta(T, s, \xi) - \eta(0, s, \xi) \neq 0, \quad s \in [0, T], \quad \xi \in \partial U$,

(A2) $\gamma(\eta(T, 0, \cdot), U) \neq 0$.

Тогда найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ система (1) имеет по крайней мере одно T-периодическое решение, лежащее в области $X = \{x: \Omega(0, t, x(t)) \in U, t \in [0, T]\}$.

Во многих случаях условие (A2) достаточно проверить для некоторой специально выбранной функции ϕ, не обязательно совпадающей с данной в (1).

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (A0). *Тогда для любых функций ϕ_1 и ϕ_2, таких, что для функции $\phi_\lambda = \lambda\phi_1 + (1-\lambda)\phi_2$ условие* (A1) *выполнено при всех $\lambda \in [0, 1]$, вращения $\gamma(\eta_1(T, 0, \cdot), U)$ и $\gamma(\eta_2(T, 0, \cdot), U)$ совпадают.*

Пусть размерность фазового пространства $k = 2$ и система (1) имеет при $\varepsilon = 0$ цикл x_0 периода T, т.е. имеет T-периодическое решение x_0 такое, что функция $x_0(t + \theta)$ по переменной t является решением системы (1) при $\varepsilon = 0$ и любом $\theta \in [0, T]$. Предположим, что цикл x_0 простой, т.е. кривая x_0 не имеет самопересечений. Тогда по теореме Жордана кривая x_0 ограничивает некоторую односвязную область U пространства $\mathbb{R}^2$. Приведем результаты, являющиеся следствием того, что вращение поля касательных и вращение поля нормалей на цикле равны 1. Так как область U односвязна, то она гомеоморфна единичному кругу B_1. Обозначим через g какой-нибудь гомеоморфизм U на B_1. Для произвольного $\delta \in [0, 1)$ определим δ-сжатие $W_{-\delta}(U)$ области U формулой $W_{-\delta}(U) = g^{-1}((1-\delta)g(U))$. Пусть теперь выполнено условие

(A3) T-периодическая система $\dot{y} = \psi'_{(2)}(t, x_0(t + \theta))y$ имеет 1 простым мультипликатором при всех $\theta \in [0, T]$.

Тогда точки границы множества $W_{-\delta}(U)$ при малых $\delta > 0$ являются точками T-невозвращаемости (см. [8]) системы (1) при $\varepsilon = 0$. Поэтому при достаточно малых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ система (1) имеет T-периодическое решение со значениями в $W_{-\delta}(U)$ (см. [8, теорема 6.1]). Если же условие (A3) не выполнено, то теорема 6.1 из [8], вообще говоря, неприменима. В этом случае условие существования T-периодических решений у системы (1) может быть получено на основании теорем 1 и 2. Для этого заметим, что $\langle \eta(T, s, x_0(\theta)) - \eta(0, s, x_0(\theta)), \dot{x}_0(\theta)^{\perp} \rangle \neq 0$ при тех и только тех $s, \theta \in [0, T]$, при которых

$$(\text{A3})_1 \quad \int_{t-T}^{t} e^{-\int_s^t \mathrm{Sp}\,\psi'_{(2)}(\tau, x_0(\tau+\theta))d\tau} \langle \phi(t, x_0(t+\theta)), \dot{x}_0(t+\theta)^{\perp} \rangle dt \neq 0,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$ и $\dot{x}_0(\theta)^{\perp}$ – вектор, полученный из вектора $\dot{x}_0(\theta)$ после его поворота на 90° против часовой стрелки. Итак, имеем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть x_0 – простой цикл системы (1) и U – его внутренность. Предположим, что условие $(\text{A3})_1$ выполнено для всех $s, \theta \in [0, T]$. Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ система (1) имеет T-периодическое решение x со значениями в U.*

Теорема 3 может быть обобщена на случай системы (1) четной размерности $k = 2p$, а именно на случай системы (1), состоящей при $\varepsilon = 0$ из p двумерных систем, имеющих простые циклы x_1, x_2, ..., x_p одинакового периода T. В этом случае в качестве U нужно взять произведение внутренностей этих циклов в соответствующих пространствах.

2. Перейдем теперь к задаче Коши. В этом пункте начальное условие для системы (1) фиксировано. Предположим, что равномерно по ξ из каждого фиксированного шара существует предел

$$\Phi(\xi) = -\lim_{n \to \infty} \frac{\eta(-nT, 0, \xi)}{nT}. \qquad (6)$$

Предел (6), например, существует в случае, когда система (5) устойчива при $t \to -\infty$ равномерно относительно ξ из каждого фиксированного шара.

Теорема 4. *Пусть система $\dot{z} = \Phi(z)$ имеет на отрезке $[0, d]$ единственное решение z_0, удовлетворяющее начальному условию $z(0) = \xi_0$. Тогда для любого $\gamma > 0$ найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ система (1) имеет решение x_ε, удовлетворяющее начальному условию $x_\varepsilon(0) = \xi_0$ и оценке*

$$\|x_\varepsilon(t) - \Omega(t, 0, z(\varepsilon t))\| \leq \gamma, \quad t \in \left[0, \frac{d}{\varepsilon}\right].$$

Из теоремы 1 и теоремы 4 вытекают классические теоремы принципа усреднения Н.Н. Боголюбова–Н.М. Крылова (см. [2]) для задачи о T-периодических решениях и задачи Коши. Для этого достаточно положить в (1) $\psi = 0$ и для сопоставления условий теоремы 1 и теоремы 5 с классическими воспользоваться формулой

$$\eta(\pm nT, s, \xi) - \eta(0, s, \xi) = \int_{s \mp nT}^{s} \phi(\tau, \xi)d\tau = \int_{\pm nT}^{0} \phi(\tau, \xi)d\tau.$$

Опишем теперь, как из теоремы 1 может быть получен классический результат из [7, с. 387] в случае, когда $\psi(t, x) = Ax = (-x_2, x_1)$ и $\phi(t, x) = (0, g(t, -x_1, x_2))$, где g – 2π-периодическая по первой переменной непрерывная функция. Размерность фазового пространства, таким образом, равна двум, и матрица A имеет простые собственные значения $\pm i$. Обозначения здесь выбраны так, чтобы формулы из [7] и получаемые из теоремы 1 совпадали. Имеем

$$\eta(T, s, \xi(a, \theta)) - \eta(0, s, \xi(a, \theta)) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} H(a, \theta),$$

где $\xi(a, \theta) = (-a\cos\theta, a\sin\theta)$ и

$$H(a, \theta) = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} (\sin\tau)g(\tau+\theta, a\cos\tau, -a\sin\tau) \\ (\cos\tau)g(\tau+\theta, a\cos\tau, -a\sin\tau) \end{pmatrix} d\tau.$$

В [7] предполагается существование $a_0, \theta_0 \in \mathbb{R}$ таких, что $a_0 \neq 0$, $H(a_0, \theta_0) = 0$ и $\det|H'(a_0, \theta_0)| \neq 0$. Но тогда найдется такое открытое множество $V = (a_0 - \delta, a_0 + \delta) \times (\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta)$, что $|\gamma(H, V)| = 1$. Так как при всех $s \in [0, 2\pi]$ векторные поля $\eta(T, s, \xi(\cdot, \cdot)) - \eta(0, s, \xi(\cdot, \cdot))$ и $H(\cdot, \cdot)$ гомотопны на ∂V, то при всех $s \in [0, 2\pi]$ они имеют одинаковое вращение на ∂V. Без ограничения общности можем считать, что $0 < \delta < a_0$ и $0 < \delta < \pi$. В этом случае непрерывное отображение ξ гомеоморфно отображает открытое множество V на открытое множество $\xi(V)$. Поэтому $\gamma(\eta(T, 0, \cdot) - \eta(0, 0, \cdot), \xi(V)) = \gamma(\eta(T, s, \xi(\cdot, \cdot)) - \eta(0, s, \xi(\cdot, \cdot)), V)$ и в силу теоремы 1 уравнение (1) в рассматриваемом случае имеет при достаточно малых $\varepsilon > 0$ 2π-периодические решения, принадлежащие множеству $X = \{x: (a, t + \theta) \in V, (a, \theta) = \xi^{-1}(x(t)), t \in [0, 2\pi]\}$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 02–01–00189 и 02–01–00307).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахмеров Р.Р., Каменский М.И.* // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 3. С. 537–540.
2. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963. 503 с.
3. *Baillieul J.* // Intern. J. Robust and Nonlinear Control. 1995. V. 5. P. 285–301.
4. *Бобылев Н.А., Красносельский М.А.* // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. № 11. С. 1946–1952.
5. *Bobylev N.A., Burman Yu.M., Korovin S.K.* Approximation Procedures in Nonlinear Oscillation Theory. B.; N. Y.: de Gruyter, 1994. 272 p.
6. *Каменский М.И.* // ДАН. 1996. Т. 347. № 2. С. 151–153.

7. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 474 с.
8. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966. 332 с.
9. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975. 512 с.
10. *Красносельский М.А., Перов А.И.* // ДАН. 1959. Т. 126. № 1. С. 15–18.
11. *Красносельский М.А., Перов А.И., Поволоцкий А.И., Забрейко П.П.* Векторные поля на плоскости. М.: Физматгиз, 1963. 246 с.
12. *Мартынюк Д.И., Самойленко А.М.* В сб.: Математическая физика. Киев, 1967. С. 128–145.
13. *Schneider Klaus R.* Nonlinear Control in the Year 2000. P., 2000. V. 2. C. 397–408.
14. *Стрыгин В.В.* // Укр. мат. журн. 1970. Т. 22. № 4. С. 503–513.

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2003, том 388, № 4, с. 443–446

МАТЕМАТИКА

УДК 519.8

МАКСИМАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ, НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ И КВАЗИНЕПРЕРЫВНЫЕ УПОРЯДОЧЕНИЯ

© 2003 г. Н. С. Кукушкин

Представлено академиком А.А. Петровым 16.09.2002 г.

Поступило 17.09.2002 г.

В работе [1] установлены условия, при которых система реакций (естественное обобщение отображений наилучшего ответа в стратегической игре) является ацикличной, т.е. итеративное применение реакций приводит в конечном счете к неподвижной точке (теоремы 3–6 [1]). Характерной чертой этих условий является присутствие на множестве исходов полного предпорядка, определенным образом согласованного с реакциями. В настоящей работе рассматривается более простая, можно сказать, более фундаментальная ситуация: доказано, что полнота предпорядка необходима и достаточна для ацикличности монотонных эндоморфизмов (теоремы 7–9). При этом нет нужды ограничиваться непрерывными упорядочениями: сформулировано свойство квазинепрерывности, обеспечивающее достаточную согласованность между топологией и порядком и допускающее различные характеризации (теорема 5 и следствие из нее, теорема 9); им обладают, в частности, лексикографические упорядочения, базирующиеся на непрерывных функциях. Теоремы 1–3 существенно усиливают теоремы 1 и 2 из [1], относящиеся к максимальным элементам произвольных бинарных отношений.

1. Пусть $\rhd$ – бинарное отношение на X. Конечная или бесконечная последовательность $\{x^k\}_{k=0,1,\dots}$ называется возрастающей последовательностью для $\rhd$, если $x^{k+1} \rhd x^k$ всякий раз, когда x^{k+1} определено. Бинарное отношение $\rhd$ обладает слабым НМ-свойством на $Y \subseteq X$, если для любого $x \in Y$ существует конечная возрастающая последовательность $\{x^k\}_{k=0,1,\dots,m}$, у которой $x^0 = x$, все $x^k \in Y$ и x^m – максимальный элемент для $\rhd$ на Y $(m \geq 0)$. Бинарное отношение $\rhd$ обладает НМ-свойством на $Y \subseteq X$, если предыдущее условие выполняется с $m \leq 1$ (т.е. если множество максимальных элементов является решением по фон Нейману–Моргенштерну).

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Российской Академии наук, Москва

Следующий результат можно считать фольклорным. Здесь он приводится для сопоставления с теоремой 1.

Теорема 0. *Для любого бинарного отношения $\rhd$ на X следующие условия эквивалентны:*

отношение $\rhd$ ациклично на X,

ни на каком конечном подмножестве $Y \subseteq X$ не существует бесконечной возрастающей последовательности для $\rhd$,

отношение $\rhd$ обладает слабым НМ-свойством на любом конечном подмножестве $Y \subseteq X$,

отношение $\rhd$ имеет максимальный элемент на любом конечном подмножестве $Y \subseteq X$.

Теперь до конца работы будем предполагать, что X – хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой. Естественно возникает желание заменить в условиях теоремы 0 конечность на компактность.

Бинарное отношение $\rhd$ называется ω-транзитивным, если оно транзитивно и всякий раз, когда бесконечная возрастающая последовательность $\{x^k\}_{k=0,1,\dots}$ сходится к x^ω, имеет место $x^\omega \rhd x^k$ для всех k. Потенциалом для бинарного отношения $\rhd$ называется антирефлексивное и ω-транзитивное отношение $\succ$, удовлетворяющее условию: $y \rhd x \Rightarrow$ $\Rightarrow y \succ x$ для всех $y, x \in X$. Бинарное отношение $\rhd$ называется ω-ацикличным, если оно ациклично и никакая бесконечная возрастающая последовательность $\{x^k\}_{k=0,1,\dots}$ не сходится к x^0.

В качестве естественного обобщения понятия возрастающей последовательности будем рассматривать траектории близорукого поиска [1], параметризованные счетными порядковыми числами; движение вдоль такой траектории сочетает переходы к доминирующим (в смысле $\rhd$) точкам с предельными переходами.

Бинарное отношение $\rhd$ называется Ω-ацикличным, если не существует траектории близорукого поиска π с $\pi(0) = \pi(\alpha)$ при $\alpha > 0$. Отношение $\rhd$ обладает Ω-НМ-свойством на $Y \subseteq X$, если для любого $x \in Y$ существует траектория близорукого поиска π для $\rhd$, у которой $\pi(0) = x$, $\pi(\alpha)$ –