

Российская академия наук

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК

Том 388 № 4 2003 Февраль

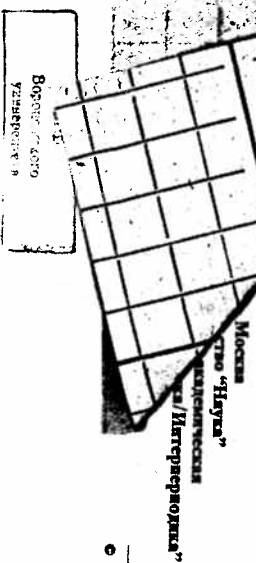
Основан в 1933 г.
Выходит 3 раза в месяц
ISSN 0869-5652

Главный редактор
В.А. Кабанов

Редакционная коллегия

- Е.Ф. Мищенко (*заместитель главного редактора*),
А.Ф. Андреев, В.И. Арнольд, Н.С. Бахвалов, О.А. Богатиков,
А.А. Боярчук, Г.П. Георгиев, Г.С. Голицын, С.В. Емельянов,
Г.А. Заварзин, В.А. Ильин, Ю.М. Каган, В.В. Козлов, В.М. Котляков,
Н.К. Коцетков, О.И. Ларичев, И.И. Моргесев, В.В. Осипко,
Ю.С. Осипов, Р.В. Петров, Н.А. Пятаев, Ю.М. Пушаровский,
Ю.Д. Третьяков, Н.Г. Хрущов, Л.М. Чайлахян, Г.Г. Черный,
Ю.А. Папковский (*ответственный секретарь*)

1997, ГСП-7, Москва В-485, Профсоюзная ул., д. 90, комн. 301
Тел. 334-73-80



© Российская академия наук
Президент, 2003 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Том 388, номер 4, 2003

МАТЕМАТИКА

Об одном подходе в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром

М. И. Казимский, О. Ю. Макаренко, П. Нистри

439

Н. С. Куришкин

Критерий неразрешимости в рингалах уравнения простой степени

Б. Б. Дурье

443

Топологическая классификация вещественных мероморфных функций общего положения на разделимых кривых

С. М. Натанзон, С. В. Шафрин

447

Расщепление асимптотических многообразий в некоторых гамильтоновых системах с двумя степенями свободы

А. О. Новик, Д. В. Трещев

449

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Характеристические мультиполи и плоские задачи электростатики диэлектриков

В. Л. Казанцев

452

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

Некоторые свойства оптимальных эллипсоидов, аппроксимирующих множества достижимости

Ф. Д. Черноуско, А. И. Осесевич

456

ФИЗИКА

Возбуждение низколежащих уровней атома свинца в электрон-атомных и в электрон-молекулярных столкновениях

Ю. М. Смирнов

462

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Новый метод аппроксимации атомарными функциями аналитического распределения ноли в раскряеве антенны

В. Ф. Кравченко

466

МЕХАНИКА

Несимметричное поведение полостей сферической оболочки при конечных прогибах

Э. И. Ризомюк, Е. А. Лопатинский

472

О нелинейной устойчивости правильных вращений многоугольников в вихотранных на сфере

Л. Г. Курякин

477

ХИМИЯ

Фенатрен как лиганд в синтезе моно- и биядерных sandwich-комплексов хрома

А. Н. Васильков, П. В. Прудынский, Г. В. Лисичкин

482

Нанометаллизация ультрадисперсного полиграфиторагидрата

С. П. Губин, М. С. Коробов, Г. Ю. Юрков, А. К. Цветишников, В. М. Бузник

488

CONTENTS

Volume 388, Number 4, 2003

English language translation of the mathematics, physics, chemistry, biological, and earth sciences sections of the journal are available from MAIK "Nauka/Interperiodica" (Russia).

MATHEMATICS

On an Approach in the Theory of Ordinary Difference Equations with Small Parameter

M. I. Kemerzhi, O. Yu. Makarenkov, P. Nisrri

439

Maximal Elements, Fixed Points, and Quasi-Continuous Orderings

N. S. Kazubkhin

443

A Criterion for Unsolvability in Radicals for an Equation in Prime Degree

B. B. Lur'e

447

Topological Classification of Generic Real Memomorphic Functions on Separating Curves

S. M. Nazarov, S. V. Shadrin

449

Splitting of Separatrices in Hamiltonian System with Two Degrees of Freedom

A. O. Novik, D. V. Treshchev

452

MATHEMATICAL PHYSICS

The Characteristic Multipoles and the Planar Problems of the Dielectric's Electrostatics

V. P. Kazantsev

456

CONTROL THEORY

Properties of Ellipsoids Approximating Attainable Sets

F. L. Chernous'ko, A. I. Ovsierich

462

PHYSICS

Excitation of Low-Lying Levels of Lead Atom in Electron-Atomic and in Electron-Molecular Collisions

Yu. M. Smirnov

466

TECHNICAL PHYSICS

The New Approximation Method by Atomic Functions to the Amplitude Distribution of Antenna Aperture

V. F. Kravchenko

472

MECHANICS

Nonsymmetric Behavior of Shallow Spherical Shell with Large Deflections

E. I. Grigoryuk, E. A. Lopanitsyn

477

On Nonlinear Stability of the Regular Vortex Polygons and Polyhedrons on a Sphere

L. G. Kuratkin

482

CHEMISTRY

Phenanthrene as Ligand in Synthesis of Mono- and Binuclear Uranium Sandwich Complexes

A. Yu. Vasil'kov, P. V. Pribytkov, G. V. Lisitskhn

488

Nanocrystallization of the Ultradispersed Poly(vinylcarbazole)styrene

S. P. Gablin, M. S. Korotkov, G. Yu. Yurkov, A. K. Tsvetnikov, V. M. Buznik

493

PHYSICAL CHEMISTRY

Radiation Recombination in Tetrahedral Nanocarbon Films

E. V. Dubrovina, V. E. Mashchenko, V. M. Puzikov, A. V. Semenov, R. K. Chuzhko, I. V. Tamirskii

497

Energy and Structure of Excited States (Conformers) in Supramolecules with Incommensurate Interacting Elements

I. D. Mikhelkin, M. Yu. Kuznetsov, E. V. Makhonina, V. P. Sakun, V. S. Perov

501

Interaction of Lithium Zirconates with Lithium at Equilibrium Conditions

G. K. Moiseev, N. A. Valoin

505

Simulation of Atomic Ordering Effects in Multicomponent System: SiAlONs and SiBCONs

S. V. Okatov, G. P. Shevkin, A. L. Ivanovskii

510

GEOLOGY

On the Origin of Water-Depth Changes in Past Epeiric Seas

E. V. Artyushkov, P. A. Chelkovich, D. H. Tarling

515

Ophiolite Dyke Assemblages in the South Anyui Suture Zone: Geodynamic Implications

A. V. Ganzein, S. D. Sokolov, O. L. Morozov, P. Leyzer, J. Hourigan

521

New Data on Late Cenozoic Tectonic Stress Fields of the Khubsugul Area (Mongolia)

V. A. San'kov, A. I. Mitroshchikova, A. V. Parfeyevs, A. V. Arzhantkova

526

GEOCHEMISTRY

Near Vein Zalteration in Mesothermal Gold Deposits of Upper-Kolyma Region (Russian North-East)

S. V. Voroshin, E. E. Tyukova, V. I. Goncharov

530

The Role of Sulphates in Carbonating Farming, Western Transbaikalia

A. G. Doroshkevich, O. V. Kobylina, G. S. Ripp

535

GEOPHYSICS

The Radioactivity and Heat Generation in Precambrian the Magmatic Rocks (in Modeling the South Pamirs)

A. S. Barymurzaev, G. I. Alibekov, A. A. Bekleva

539

New Data on the Existence of a Benioff Zone in the Caucasian-Caspian Region

E. N. Khalilov

542

OCEANOLOGY

Effect of Grid-Scale Turbulence in Modeling of Ocean Dynamics

A. S. Sarkisyan

545

BIOCHEMISTRY, BIOPHYSICS, MOLECULAR BIOLOGY

The Influence of Ultralow Ascorbic Acid Concentrations on the Water Transmission Factor Fluctuations in IR Spectrum

G. M. Zubareva, A. V. Karagapov, L. S. Yaguzhinskii

549

The Different Sensitiveness to Bisulphine Derivatives of Dicarboxylic Acids in Cholinesterases of Common Squid, *Berytyellus magister*

from Its Various Inhabitants

E. V. Rozzangari

552

CELL BIOLOGY

Medium for Microsurgery Nuclear Transfer in Mice: The Osmolarity Phenomenon

T. A. Chailakhyan, E. F. Vikhlyantseva, T. N. Cheborareva, L. M. Chailakhyan

555

PHYSIOLOGY

The Study of Possibilities of Absorption of Intact Neuropeptides in Rat Isolated Intestine *in vivo*

Yu. V. Nalochin, N. P. Prutsikova, E. I. Shakhmarova, A. A. Gruzdov, L. V. Gromova

558

GENERAL BIOLOGY

Reconstruction and Prediction of Water Vole Density Dynamic by Tularema Morbidity in Novosibirsk Region
V. M. Efimov, Yu. K. Galaktionov, T. A. Galaktionova 562

Use of Principle of Spatial-Timely Analogs in the Analysis of Anthropogenic Successions and in the Conceptions of Pressing on Water Ecosystems
S. V. Kravtsova, G. Matishov, K. V. Kravtsova 565

Polynomial Models of Mammalian Sound Signals
A. A. Nikol'skii 568

Q2A-Adrenoceptor Gene Effects Vulnerability of Neonatal Rats to Cold Anesthesia
G. T. Shishkina, N. N. Dugalo, T. S. Kalitina, L. B. Maslennikova 571

Author Standards 574

МАТЕМАТИКА

УДК 517.925.42

**ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ В ТЕОРИИ
 ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
 С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ**

© 2003 г. М. И. Каменский, О. Ю. Макаренко, П. Нистри
 Престалдово академиком В. А. Ильиным 13.06.2002 г.

Получено 17.06.2002 г.

В работе изучаются задача о периодических решениях и задача Коши для систем дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = \epsilon f(t, x) + \psi(t, x), \quad (1)$$

где $\phi, \psi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывны и T -периодичны по первой переменной, ϵ – малый положительный параметр.

Системы вида (1) являются классическим объектом теории уравнений с малым параметром и исследовались различными методами. Остановимся лишь на тех из них, которые непосредственно связаны с предельными результатами. В работах [5, 8, 9] такое исследование проводится при помощи теории вращения векторных полей или индекса Пуанкаре. При этом в задаче о T -периодических решениях обычно предполагается, что при $\epsilon = 0$ система (1) имеет изолированное T -периодическое решение ненулевого топологического индекса, а задача Коши имеет единственное решение на некотором отрезке $[0, d]$, что влечет также отличие от нуля топологического индекса этого решения (см. [10]). Далее, применяя теорему о непрерывной зависимости от параметров решений операторных уравнений (см., например, [9]), устанавливаются наличие при малых $\epsilon > 0$ соответствующих решений системы (1) и их сходимость к изолированному ненулевому топологического индекса решению системы (1) при $\epsilon = 0$. Отметим, что при этом для задачи Коши близость решений устанавливается на том же отрезке $[0, d]$, на котором предполагается существование и единственность системы (1) при $\epsilon = 0$. Другим методом исследования Н.Н. Боголюбова-Н.М. Крылова (см. [2]). Для применения этого

метода следует сначала свести систему (1) к стандартной форме

$$\dot{x} = \epsilon f(t, x), \quad (2)$$

где f – функция, T -периодическая по первой переменной. Исследование системы (2) также возможно на основании топологических методов, связанных с понятием векторных полей (см., например, [1, 6, 12, 14]). Для этого расщепляют вспомогательную систему

$$\dot{x} = \epsilon f(t, x), \quad (3)$$

$$f(t, \xi) = \int_0^T f(s, \xi) ds, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Изолированные состояния равновесия системы (3) ненулевого топологического индекса по отношению к полю $-f_0$ порождают T -периодические решения системы (2). Решения же задачи Коши для системы (2) близки к соответствующим решениям задачи Коши для системы (3) на отрезке длины порядка $\frac{1}{\epsilon}$. Основным способом сведения системы (1) к стандартной форме (2) является замена переменных

$$x(t) = \Omega(t, \tau, \chi(\tau)), \quad (4)$$

где через $\Omega(\cdot, \tau, \chi)$ обозначено решение системы (1) при $\epsilon = 0$ с начальными условиями $\chi(\tau_0) = \xi$ и которую для применения принципа усреднения приходится предполагать T -периодической по τ при T -периодических функциях χ (см. [3, 13]).

В настоящей работе мы не требуем T -периодичности замены (4). Вместо него используем более слабое предположение о том, что начальные значения T -периодических решений системы (1) при $\epsilon = 0$ заполняют границу некоторого открытого множества U в пространстве \mathbb{R}^n . В этих условиях T -периодические решения системы (1) при $\epsilon = 0$ не являются изолированными, что исключает возможность непосредственного применения теорем

Воронежский государственный университет
 University of State, Stepa, Lady

о непрерывной зависимости от параметра решений соответствующих операторных уравнений. Важным для приложений примером такой ситуации является случай, специально рассматриваемый ниже, двумерной автономной при $\varepsilon = 0$ системы (1), имеющей изолированный цикл χ_0 . В этом случае в качестве U можно взять внутренность цикла χ_0 . Сложность задачи о существовании T -периодических решений у системы (1) состоит в том, что множество T -периодических решений, порожденных циклом χ_0 , имеет, как показано в [4], нулевую топологическую индекс.

В качестве системы, определяющей поведение решений системы (1) при малых $\varepsilon > 0$, в сообщении Предлагаются использовать линейную систему

$$y' = \Phi(\varepsilon, \Omega(\varepsilon, 0, \xi)) + \Psi(\varepsilon)(\varepsilon, \Omega(\varepsilon, 0, \xi)), \quad (5)$$

где $\xi \in R^k$. Из формулировок ниже в терминах системы (5) результатов о свойствах решений системы (1) следует классические результаты принята упрощения для задачи о T -периодических решениях и задачи Коши, а также результаты [7] в случае, когда $\Psi(\varepsilon, x) = A\varepsilon$, где A — матрица, имеющая два простых собственных значения $\pm i\pi$.

1. Рассмотрим сначала задачу о существовании T -периодических решений. Обозначим через $\eta(\varepsilon, \xi)$ решение системы (5) с начальным условием $\eta(\varepsilon, 0) = 0$. В этом разрезе будет использовано классическое понятие вращения непрерывного отображения $F: U \rightarrow U$, заданного на замыкании отрывочного множества $U \subset R^k$ (см. [9]). Эту величину будем обозначать через $\chi(F, U)$.

Теорема 1. Пусть множество $U \subset R^k$ открыто и ограничено. Предположим, что выполнены следующие условия:

- (A0) $\Omega(\varepsilon, 0, \xi) = \xi, \quad \xi \in \partial U,$
- (A1) $\eta(T, \varepsilon, \xi) - \eta(0, \varepsilon, \xi) \neq 0, \quad \varepsilon \in [0, T], \quad \xi \in \partial U,$
- (A2) $\chi(\eta(T, 0, \cdot), U) \neq 0.$

Тогда найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ система (1) имеет по крайней мере одно T -периодическое решение, лежащее в области $X = \{\varepsilon: \Omega(0, \varepsilon, \theta) \in U, \varepsilon \in [0, T]\}$.

Во многих случаях условие (A2) достаточно проверить для некоторой специально выбранной функции ϕ , не обязательно совпадающей с данной в (1).

Теорема 2. Пусть выполнены условия (A0), функции $\phi_1 = \lambda\phi + (1-\lambda)\phi_2$ условия (A1) выполнены при всех $\lambda \in [0, 1]$, вращения $\chi(\eta(T, 0, \cdot), U)$ и $\chi(\eta_2(T, 0, \cdot), U)$ совпадают.

Пусть размерность фазового пространства $k = 2$ и система (1) имеет при $\varepsilon = 0$ цикл χ_0 периода T , т.е. имеет T -периодическое решение χ_0 , такое, что функция $\chi_0(t + \theta)$ по переменной t является решением системы (1) при $\varepsilon = 0$ и любом $\theta \in [0, T]$. Предположим, что цикл χ_0 простой, т.е. кривая χ_0 не имеет сампересечений. Тогда по теореме Жордана кривая χ_0 ограничивает некоторую одностороннюю область U пространный R^2 . Приведем результаты, являющиеся следствием того, что вращение поля касательных и вращения поля нормалей на цикле равны 1. Так как область U ориентирована, то она гомеоморфна единичному кругу B_1 . Обозначим через g какой-нибудь гомеоморфизм U на B_1 . Для произвольного $\delta \in [0, 1]$ определим δ -сжатие $W_\delta(U)$ области U формулой $W_\delta(U) = g^{-1}(1 - \delta)g(U)$. Пусть теперь выполнено условие

$$(A3) \quad T\text{-периодическая система } y' = \Psi(\varepsilon)(t, \chi_0(t + \theta)) \text{ имеет 1 простым мультипликатором при всех } \theta \in [0, T].$$

Тогда точка границы множества $W_\delta(U)$ при малых $\delta > 0$ является точками T -невозвратимости (см. [8]) системы (1) при $\varepsilon = 0$. Поэтому при достаточно малых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ система (1) имеет T -периодическое решение со значениями в $W_\delta(U)$ (см. [8, теорема 6.1]). Если же условие (A3) не выполнено, то теорема 6.1 из [8], вообще говоря, неприменима. В этом случае условие существования T -периодических решений у системы (1) может быть получено на основании теорем 1 и 2. Для этого заметим, что $(\eta(T, \varepsilon, \chi_0(\theta)) - \eta(0, \varepsilon, \chi_0(\theta)), \chi_0(\theta)) \neq 0$ при тех и только тех $\varepsilon, \theta \in [0, T]$, при которых

$$(A3) \quad \int_{-T}^T e^{\int_s^t \Psi(\tau)(\tau, \chi_0(\tau + \theta)) d\tau} \langle \phi(t, \chi_0(t + \theta)), \chi_0(t + \theta) \rangle dt \neq 0,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в R^2 и $\chi_0(\theta) =$ — вектор, полученный из вектора $\dot{\chi}_0(\theta)$ после его поворота на 90° против часовой стрелки. Итак, имеем следующий результат.

Теорема 3. Пусть χ_0 — простой цикл системы (1) и U — его внутренность. Предположим, что условие (A3), выполнено для всех $\varepsilon, \theta \in [0, T]$. Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ система (1) имеет T -периодическое решение x со значениями в U .

Теорема 3 может быть обобщена на случай системы (1) четной размерности $k = 2p$, а именно на случай системы (1), состоящей при $\varepsilon = 0$ из p двумерных систем, имеющих простые циклы $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_p$ одинакового периода T . В этом случае в качестве U нужно взять произведение внутренних этих циклов в соответствующих пространствах.

2. Перейдем теперь к задаче Коши. В этом пункте начальное условие для системы (1) фиксировано. Предположим, что равномерно по ξ из каждого фиксированного шара существует предел

$$\Phi(\xi) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\eta(-t, 0, \xi)}{t}, \quad (6)$$

Предел (6), например, существует в случае, когда система (5) устойчива при $t \rightarrow -\infty$ равномерно относительно ξ на каждом фиксированном шаре.

Теорема 4. Пусть система $\dot{z} = \Phi(z)$ имеет на отрезке $[0, d]$ единственное решение z_0 , удовлетворяющее начальному условию $z(0) = z_0$. Тогда для любого $\gamma > 0$ найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ система (1) имеет решение x_ε , удовлетворяющее начальному условию $x_\varepsilon(0) = z_0$ и оценке

$$\|x_\varepsilon(t) - \Omega(\varepsilon, 0, z(\varepsilon t))\| \leq \gamma, \quad t \in [0, \frac{d}{\varepsilon}].$$

Из теоремы 1 и теоремы 4 вытекают классические теоремы принципа урешения Н.Н. Боголюбова-Н.М. Крылова (см. [2]) для задачи о T -периодических решениях и задачи Коши. Для этого достаточно положить в (1) $W = 0$ и для сопоставления условий теоремы 1 и теоремы 5 с классическими воспользоваться формулой

$$\eta(\eta T, \varepsilon, \xi) - \eta(0, \varepsilon, \xi) = \int_{\varepsilon T}^T \phi(\tau, \xi) d\tau = \int_{\varepsilon T}^T \phi(\tau, \xi) d\tau.$$

Опишем теперь, как из теоремы 1 может быть получен классический результат из [7, с. 387] в случае, когда $\Psi(\varepsilon, x) = A\varepsilon x + (-x_2, x_1)$ и $\phi(\varepsilon, x) = (0, g(x_1 - x_2))$, где g — 2π -периодическая по первой фазовой непрерывная функция. Размерность фазового пространства, таким образом, равна

лвм, и матрица A имеет простые собственные значения $\pm i\pi$. Обозначим здесь выбранный так, чтобы формулы из [7] и получаемые из теоремы 1 совпадали. Имеем

$$\eta(T, \varepsilon, \xi(a, \theta)) - \eta(0, \varepsilon, \xi(a, \theta)) = \int_{\varepsilon T}^T \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \theta \\ -\sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} H(a, \theta),$$

где $\xi(a, \theta) = (-a \cos \theta, a \sin \theta)$ и

$$H(a, \theta) = \int_0^{2\pi} (\sin \tau) g(\tau + \theta, a \cos \tau, -a \sin \tau) dt.$$

В [7] предполагается существование $a_0, \theta_0 \in R$ таких, что $a_0 \neq 0, H(a_0, \theta_0) = 0$ и $\det(H(a_0, \theta_0)) \neq 0$. Но тогда найдется такое открытое множество $V = (a_0 - \delta, a_0 + \delta) \times (\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta)$, что $[H(V), V] = 1$. Так как при всех $s \in [0, 2\pi]$ векторное поле $\eta(T, s, \xi(\cdot, \cdot)) - \eta(0, s, \xi(\cdot, \cdot))$ и $H(\cdot, \cdot)$ гомогонны на ∂V , то при всех $s \in [0, 2\pi]$ они имеют одинаковое направление. Без ограничения общности можем считать, что $0 < \delta < a_0$ и $0 < \delta < \pi$. В этом случае непрерывное отображение ξ гомеоморфно отображает открытое множество V на открытое множество $\xi(V)$. Поэтому $\chi(\eta(T, 0, \cdot) - \eta(0, 0, \cdot)) = \chi(\eta(T, \varepsilon, \xi(\cdot, \cdot)) - \eta(0, \varepsilon, \xi(\cdot, \cdot)))$ и в силу теоремы 1 уравнение (1) в рассматриваемом случае имеет при достаточно малых $\varepsilon > 0$ 2π -периодическое решение, принадлежащее множеству $X = \{\varepsilon: (a, t + \theta) \in V, (a, \theta) \in \xi^{-1}(x(t)), t \in [0, 2\pi]\}$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 02-01-00189 и 02-01-00307).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акимов Р.Р., Каменский М.И. // Дифференциальные уравнения. 1974. Т. 10. № 3. С. 357-340.
2. Боголюбов Н.Н., Митрополский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963. 303 с.
3. Baillif J. // Intern. J. Robot and Nonlinear Control. 1995. V. 5. P. 285-301.
4. Бобкеев Н.А., Красновский М.А. // Дифференциальные уравнения. 1970. Т. 6. № 11. С. 1946-1952.
5. Bobylev N.A., Vitman Yu.M., Korovin S.K. Approximation Procedures in Nonlinear Oscillation Theory. В: N. Y.: de Gruyter, 1994. 272 p.
6. Каменский М.И. // ДАН. 1996. Т. 347. № 2. С. 151-153.

7. Кобдинтон Э.А., Левикон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во Инстр. лит., 1958. 474 с.
8. Красносельский М.А. Оператор свинга по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966. 332 с.
9. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Гомеоптические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975. 512 с.
10. Красносельский М.А., Перов А.И. // ДАН. 1959, Т. 126, № 1, С. 15–18.
11. Красносельский М.А., Перов А.И., Поволоцкий А.И., Забрейко П.П. Векторные поля на плоскости. М.: Физматгиз, 1963. 246 с.
12. Мартынюк Д.И., Самойленко А.М. В сб.: Математическая физика. Киев, 1967. С. 128–145.
13. Schneider Klaus R. Nonlinear Control in the Year 2000. P. 2000. V. 2. С. 397–408.
14. Спрыгина В.В. // Укр. мат. журн. 1970. Т. 22. № 4. С. 503–513.

МАКСИМАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ, НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ И КВАЗИНЕПЕРЫВЫЕ УПОРЯДОЧЕНИЯ

© 2003 г. Н. С. КУКУШКИН

Представлено академиком А.А. Петровым 16.09.2002 г.

Поступило 17.09.2002 г.

В работе [1] установлены условия, при которых система реакций (естественное обобщение отображений наилучшего ответа в стратегической игре) является ациклической, т.е. итеративное применение реакции приводит в конечном счете к неподвижной точке (теоремы 3–6 [1]). Характерной чертой этих условий является присутствие на множестве исходов полного предпорядка, определенным образом согласованного с реакциями. В настоящей работе рассматривается более простая, можно сказать, более фундаментальная ситуация: доказано, что полнота предпорядка не необходима и достаточна для ациклическости монотонных эндоморфизмов (теоремы 7–9). При этом нет нужды ограничиваться непрерывными отображениями: формулировано свойство квазинепрерывности, обеспечивающее достаточную согласованность между топологией и порядком и допускающее различные характеристики (теорема 5 и следствие из нее, теорема 9); им обладают, в частности, лексикографические упорядочения, базисрующиеся на непрерывных функциях. Теоремы 1–3 существенно усиливают теоремы 1 и 2 из [1], относящиеся к максимальным элементам произвольных бинарных отношений.

1. Пусть \triangleright – бинарное отношение на X . Конечная или бесконечная последовательность $\{x^i\}_{i=0,1,\dots}$ называется возрастающей последовательностью для \triangleright , если $x^{i+1} \triangleright x^i$ всякий раз, когда x^{i+1} определено. Бинарное отношение \triangleright обладает слабым НМ-свойством на $Y \subseteq X$, если для любого $x \in Y$ существует конечная возрастающая последовательность $\{x^i\}_{i=0,1,\dots,m}$ у которой $x^0 = x$, все $x^i \in Y$ и x^m – максимальный элемент для \triangleright на Y ($m \geq 0$). Бинарное отношение \triangleright обладает НМ-свойством на $Y \subseteq X$, если предыдущее условие выполняется с $m \leq 1$ (т.е. если множество максимальных элементов является решением по фон Нейману–Моргенштерну).

Следующий результат можно считать фольклорным. Здесь он приводится для сопоставления с теоремой 1.

Теорема 0. Для любого бинарного отношения \triangleright на X следующие условия эквивалентны:

- отношение \triangleright ациклично на X ,
- ни на каком конечном подмножестве $Y \subseteq X$ не существует бесконечной возрастающей последовательности для \triangleright ,
- отношение \triangleright обладает слабым НМ-свойством на любом конечном подмножестве $Y \subseteq X$,
- отношение \triangleright имеет максимальный элемент на любом конечном подмножестве $Y \subseteq X$.

Теперь до конца работы будем предполагать, что X – хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой. Естественно возникает желание изменить в условиях теоремы 0 конечность на компактность.

Бинарное отношение \triangleright называется ω -транзитивным, если оно транзитивно и всякий раз, когда бесконечная возрастающая последовательность $\{x^i\}_{i=0,1,\dots}$ сходится к x^* , имеет место $x^* \triangleright x^i$ для всех i . Потенциалом для бинарного отношения \triangleright называется анטיפрефлексивное и ω -транзитивное отношение \succ , удовлетворяющее условию: $y \triangleright x \Rightarrow y \succ x$ для всех $y, x \in X$. Бинарное отношение \triangleright называется ω -ациклическим, если оно ациклично и никакая бесконечная возрастающая последовательность $\{x^i\}_{i=0,1,\dots}$ не сходится к x^* .

В качестве естественного обобщения понятия возрастающей последовательности будем рассматривать траектории близорукго поиска [1], параметризованные счетными порядковыми числами; движение вдоль такой траектории сообразно переходит к доминирующим (в смысле \triangleright) точкам с предельными переходами.

Бинарное отношение \triangleright называется Ω -ациклическим, если не существует траектории близорукго поиска π с $\pi(0) = \pi(\Omega)$ при $\Omega > 0$. Отношение \triangleright обладает Ω -НМ-свойством на $Y \subseteq X$, если для любого $x \in Y$ существует траектория близорукго поиска π для \triangleright у которой $\pi(0) = x$, $\pi(\Omega) =$