$-x(\rho))$,

$-x(\sigma))$.

й части максимум может

$\min_q x(q)$.

н $x(q)$,

овлено.
а уравнения (5) и нера-
ных функционалов $\alpha=$
ы [11].

ренц. уравнения. 1979. Т. 15,

тулл ина Л. Ф. Введение
1991.
еории краевых задач обыкно-

вые задачи для обыкновенных

овременные проблемы матема-

. 1985. Vol. 9, N 2. P. 171—180.
1977. Vol. 26, N 2. P. 200—222.
Rocky Mountain J. Math. 1980.

122, N 1. P. 169—195.
6, № 1. С. 18—21.
Т. 29, № 5. С. 744—750.
переменной. М., 1974.

Поступила в редакцию
17 июля 1992 г.

УДК 517.977

П. ДЗЕККА, П. НИСТРИ, А. В. ФРОЛОВ

ДВЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

В настоящей работе приведены достаточные условия существования периодических решений нелинейных систем управления с запаздыванием. Кроме того, рассмотрены задачи оптимизации с двумя различными функционалами, для которых показано, что они достигают своего минимума на множестве решений S, состоящего из всех пар (x, u), где u — управление из заданного множества управлений U и x — периодическое решение системы, соответствующее решению u.

Введение. В данной работе рассматривается нелинейная задача управления, описываемая дифференциальной системой с h-запаздывающим аргументом в состоянии $t\to x(t)\in \mathrm{R}^n$ вида

$$\dot{x}(t)=f(t, x(t),\ x(t-h),\ u(t)) \text{ при п. в. } t\in[0, \omega],$$
$$x_0(\theta)=\varphi(\theta) \text{ при } \theta\in[-h, 0]. \tag{1}$$

Здесь $h>0$, $x_t(\theta)=x(t+\theta)$ $\forall t\in \mathrm{R}$ и $t\to u(t)$ — закон управления, принимающий значения из заданного компактного множества K из R^m.

Предположим, что функция $f\colon [0, \omega]\times \mathrm{R}^n\times \mathrm{R}^n\times \mathrm{R}^m\to \mathrm{R}^n$ удовлетворяет следующим условиям:

h_1) отображение $f(\cdot, x, y, u)$ измеримо на $[0, \omega]$ при любых $(x, y, u)\in \mathrm{R}^n\times \mathrm{R}^n\times \mathrm{K}$ и отображение $f(t, \cdot, \cdot, \cdot)$ непрерывно в $\mathrm{R}^n\times \mathrm{R}^n\times \mathrm{K}$ при п. в. $t\in[0, \omega]$;

h_2) существуют такие $\alpha, \beta\in L^1([0, \omega],\ \mathrm{R}^+)$, что $|f(t, x, y, u)|\leqslant \alpha(t)|x|+\beta(t)|y|$ при п. в. $t\in[0, \omega]$, для любых $(x, y)\in \mathrm{R}^n\times \mathrm{R}^n$ и $u\in \mathrm{K}$, при п. в. $t\in[0, \omega]$, для любых $(x, y)\in \mathrm{R}^n\times \mathrm{R}^n$ пусть $F(t, x, y)=\{f(t, x, y, u): u\in \mathrm{K}\}$;

h_3) существует такое $r_0>0$, что $\langle z, z'\rangle>0$ для любых $z, z'\in F(t, x, x)$, $|x|\geqslant r_0$ и $t\in[0, \omega]$;

h_4) существуют такие C^1-функция $V\colon \mathrm{R}^n\to \mathrm{R}$ и число $r_1\geqslant r_0$, что $\langle \operatorname{grag} V, z\rangle>0$ при любых $z\in F(t, x, y)$, $|x|$, $|y|\geqslant r_1$ и п. в. $t\in[0, \omega]$.

Класс допустимых управлений задается уравнением

$$U=\{u\in L^\infty([0, \omega],\ \mathrm{R}^m): u(t)\in \mathrm{K} \text{ при п. в. } t\in[0, \omega]\}.$$

По всей статье предполагается, что α, β, f и u являются ω-периодически продолжаемыми на R функциями.

Работа построена следующим образом. В п. 1 показано, что условия h_1)—h_4) для любых $u\in U$ обеспечивают существование ω-периодического решения x системы (1). В п. 2 рассматриваются две задачи оптимального управления с различными функционалами качества и показывается, что эти функционалы достигают своего минимума на множестве решений S, состоящем из всех пар (x, u), где $u\in U$ и x — периодическое решение системы (1), соответствующее управлению u. При решении этих задач оптимизации используются две различные техники: первая основана на свойствах выпуклости многозначного отображения, описывающего поведение динамической системы и функционала качества (см. [1]), вторая — на особых свойствах члена $\eta(u)$, входящего в функционал качества.

1. ω-Периодические решения системы (1). В случае, если $\omega \leqslant h$, пусть Φ — пространство всех ω-периодических непрерывных функций, определенных на $[-h, 0]$, если же $h < \omega$, то $\Phi = C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$. Пусть $X = AC([0, \omega], \mathbb{R}^n)$ и $Y = L^1([0, \omega], \mathbb{R}^n)$.

Для любых $\varphi \in \Phi$ и $x \in X$ определим функцию $\varphi * x : [-h, \omega] \to \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$\varphi * x(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{при } t \in [-h, 0], \\ x(t) & \text{при } t \in [0, \omega]. \end{cases}$$

Зафиксируем $\pi = (\lambda, \varphi, u) \in [0, 1] \times \Phi \times U = \Pi$ и рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), \quad \varphi * x(t - \lambda h), \ u(t)) \text{ при п. в. } t \in [0, \omega], \qquad (P_\pi)$$
$$\varphi(0) = x(0).$$

Пусть $X_\varphi = \{x \in X : x(0) = \varphi(0)\}$. Определим операторы $L_\varphi : X_\varphi \to Y$ и $J^\lambda_{\varphi, u} : Y \to Y$ следующим образом:

$$L_\varphi(x)(t) = \dot{x}(t) \text{ для любых } t \in [0, \omega],$$

$$J^\lambda_{\varphi, u}(x)(t) = f(t, x(t), \varphi * x(t - \lambda h), u(t)) \text{ при п. в. } t \in [0, \omega].$$

Отображение $J^\lambda_{\varphi, u} : Y \to Y$ непрерывно и, согласно предположениям h_1), h_2), отображает ограниченные множества в ограниченные множества. Следовательно, задача (P_π) эквивалентна уравнению

$$x = H^\lambda_{\varphi, u}(x),$$

где $H^\lambda_{\varphi, u} = i L^{-1}_\varphi J^\lambda_{\varphi, u} : Y \to Y$ при любых $\pi = (\lambda, \varphi, u) \in \Pi$ — непрерывный и компактный в силу компактности i-погружения X в Y оператор. В дальнейшем будем в обозначениях i опускать.

Рассмотрим решение задачи P_π, которое является многозначным отображением $S : \Pi \multimap Y$, определенным на Π следующим образом:

$$S(\pi) = \{x \in Y : x \text{ — решение задачи } P_\pi\}.$$

Очевидно, $S(\pi) \subset X$ при любых $\pi \in \Pi$, и пусть $S^\pi = (\pi, S(\pi))$. Ясно, что $\mathrm{Gr}(S) = \{(\pi, S(\pi)) : \pi \in \Pi\}$.

Лемма 1. *Пусть выполняются условия h_1) и h_2). Тогда отображение $S : \Pi \multimap Y$ принимает значения из компактного множества и является полунепрерывным сверху на Π.*

Доказательство леммы 1. Отображение $S : \Pi \multimap Y$ имеет компактные значения в Y, поскольку эти значения являются неподвижными точками в пространстве X непрерывного и компактного оператора $H^\lambda_{\varphi, u} : Y \multimap Y$. Более того, нетрудно показать, что условие h_2) гарантирует нам, что любое абсолютно непрерывное решение задачи (P_π) определено на $[0, \omega]$ и существует положительное D_π, зависящее только от π, такое, что $\max\limits_{\tau \in [0, \omega]} |x(t)| \leqslant D_\pi$ для всех решений (P_π). Таким образом, для любого $\pi \in \Pi$ существует положительная C_π такая, что $\|x\|_X \leqslant C_\pi$.

Определим $\Omega = \{(\pi, x) \in \Pi \times X : \|x\|_X \leqslant C_\pi + 1\}$. Ясно, что $\mathrm{Gr}(S) \subset \Omega$. Требуется доказать, что Ω локально ограничена на Π, т. е. для любого $(\pi, x) \in \Omega$ существует такая окрестность N точки π, что $\Omega \cap (N \times X)$ является ограниченным множеством из $\Pi \times X$. В этом случае, согласно предположению 2.1 из работы [2], отображение S полунепрерывно сверху (п. н. с.) в любой точке $\pi = (\lambda, \varphi, u)$.

Предположим обратное, а именно что существует $\pi \in \Pi$ и последовательность π_n, сходящаяся к π так, что можно выбрать последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \in S(\pi_n)$, для которой $\|x_n\|_X \to \infty$ при $n \to +\infty$.

Введем теперь последовательность $\{g_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ функций $g_n(t,p):f(t,p,\varphi_n*p(t-\lambda_n h),\ u_n(t))$ при п. в. $t\in[0,\omega]$, где

$$\varphi_n*p(\tau)=\begin{cases}\varphi_n(\tau) & \text{при } \tau\in[-h,0],\\ p & \text{при } \tau\in[0,\omega].\end{cases}$$

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\dot{x}(t)=g_n(t,x(t)) \text{ при п. в. } t\in[0,\omega],$$
$$x(0)=\varphi_n(0).$$

Нетрудно убедиться, что все условия теоремы 2.4 из работы [3] выполняются. В частности, для п. в. $t\in[0,\omega]$ последовательность $\{p\to g_n(t,p)\}$ сходится равномерно к $p\to g(t,p)$ в любом компактном подмножестве множества $\mathbf{R}^n$. Здесь $g(t,p)=f(t,p,\varphi*p(t-\lambda_n h),\ u(t))$. Следовательно, любая последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, удовлетворяющая

$$\dot{x}(t)=g_n(t,x_n(t)) \text{ при п. в. } t\in[0,\omega],$$
$$x(0)=\varphi_n(0),$$

имеет равномерно сходящуюся на $[0,\omega]$ подпоследовательность к решению задачи Коши вида

$$\dot{x}(t)=g(t,x(t)) \text{ при п. в. } t\in[0,\omega],$$
$$x(0)=\varphi(0),$$

где $g(t,x(t))=f(t,x(t),\ \varphi*x(t-\lambda h),\ u(t))$, $\max\limits_{t\in[0,\omega]}|x(t)|\leqslant D_\pi$, и, согласно условию $h_2)$, x ограничено в X.

Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что в случае, если $S(\pi)$ является синглетоном для каждого $\pi\in\Pi$, лемма 1 является следствием классического результата (см., например, [4, 5]).

Так как множество Ω локально ограничено на $\Pi=[0,1]\times\Phi\times U$, можно показать, что если B — любое ограниченное подмножество множества Φ, то множество решений $S([0,1]\times B\times U)$ ограничено в X и условно компактно в $C([0,\omega],\ \mathbf{R}^n)$.

Определим отображение $G:\Pi\times X\to\Phi$ при любом $t\in[-h,0]$ следующим образом:

$$G(\pi,x)(t)=\varphi*x(\lambda t+\omega),$$

и пусть $T:\Pi\multimap\Phi$ — отображение, определяемое равенством $T(\pi)=G(S^\pi)$. Согласно лемме 1 и замечанию 1, отображение T является компактным и полунепрерывным сверху.

Для любой фиксированной пары $(\lambda,u)\in[0,1]\times U$ имеет место отображение $T_u^\lambda:\Phi\to\Phi$, задаваемое $T_u^\lambda(\cdot)=T(\lambda,\cdot,u)$.

Можно доказать следующую лемму.

Л е м м а 2. *Пусть выполняются условия* $h_1)$, $h_2)$ *и* $h_4)$. *Тогда существует такое число* $r>0$, *что* $\varphi\notin T_u^\lambda(\varphi)$ *при* $\varphi\in\Phi$, *удовлетворяющих равенству* $\max\limits_{t\in[-h,0]}|\varphi(t)|=r$, *и любых* $(\lambda,u)\in[0,1]\times U$. *Более того, если* $\lambda=1$ *и* $\varphi\in T_u^1(\varphi)$, *то функция* $\tilde{x}$, *являющаяся* ω-*периодическим продолжением функции* $x\in S(1,\varphi,u)$ *такой, что* $\varphi(t)=\varphi*x(t+\omega)$ *при* $t\in[-h,0]$, *представляет собой* ω-*периодическое решение задачи* (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 2. Используя условия $h_1)$, $h_2)$, можно доказать существование такой константы $r_2\geqslant r_1$, что если $\varphi\in T_u^\lambda(\varphi)$ при некоторых $\lambda\in[0,1]$, $u\in U$ и $x\in S(\lambda,\varphi,u)$ при $|x(\tau)|\leqslant r$ для какого-нибудь $\tau\in[0,\omega]$, то $\max\limits_{t\in[0,\omega]}|x(t)|\leqslant r_2$. Положим $r\geqslant r_1$ и предположим, что $\max\limits_{t\in[0,\omega]}|\varphi(t)|=r$. Пусть t_0 является наибольшим значением на

$[-h, 0]$, так что $|x(t_0)| = r$. С другой стороны, $x(\lambda t_0+\omega) = \Phi(t_0)$ при некоторых $x \in S(\lambda, \Phi, u)$. Мы приняли, что при каждом $\tau \in [0, \omega]$ $|x(\tau)| > r_1$, $|\varphi * x(\tau - \lambda h)| > r_1$. Предположим обратное, т. е. что при некотором $\tau_0 \in [0, \omega]$ предыдущие неравенства не выполняются. Если

$$|x(\tau_0)| \leqslant r_1, \tag{$*$}$$

то $|x(\tau)| \leqslant r_2$ при всех $t \in [0, \omega]$ и, в частности, $r = |\varphi(t_0)| = |x(\lambda t_0 + \omega)| \leqslant r_2$. Получили противоречие.

Если $|\varphi * x(\tau_0 - \lambda h)| \leqslant r_1$, то либо $\tau_0 \geqslant \lambda h$ и $|x(\tau_0 - \lambda h)| \leqslant r_1$, либо $\tau_0 < \lambda h$ и $|\varphi(\tau_0 - \lambda h)| \leqslant r_1$. В первом случае имеем тоже $(*)$, во-втором, без потери общности предположив, что $\tau_0 - \lambda h = \max\{\xi \in [-h, 0] : |\varphi(\xi)| \leqslant r_1\}$, имеем

$$|\varphi(\tau_0 - \lambda h)| = |x(\lambda(\tau_0 - \lambda h) + \omega)| \leqslant r.$$

Теперь рассмотрим абсолютно непрерывную функцию $v: [0, \omega] \to \mathrm{R}^n$, задаваемую выражением $v(t) = V(x(t))$, где V удовлетворяет условию h_4). Имеем, что

$$\dot{v}(t) = \langle \operatorname{grad} V(x(t)), \dot{x}(t) \rangle > 0 \text{ при п. в. } t \in [0, \omega].$$

Однако последнее противоречит условию, что $v(0) = v(\omega)$. Следовательно, при любых $\lambda \in [0, 1]$ если $\varphi \in T_u^1(\varphi)$, то $\max\limits_{t \in [0, \omega]} |\varphi(t)| \neq r$.

Наконец, предположим, что $\varphi \in T_u^1(\varphi)$. Пусть также $x \in S(1, \varphi, u) = S^1_{\varphi, u}$, так что $\varphi(t) = \varphi * x(t + \omega)$ при любых $t \in [-h, 0]$. Пусть $\bar{x}: \mathrm{R} \to \mathrm{R}^n$ определяется выражением $\bar{x}(t + n\omega) = x(t)$ для $n \in \mathrm{Z}$, $t \in [0, \omega]$. Имеем $\varphi * x(t) = \bar{x}(t)$ на $[-h, \omega]$ и при $t \in [0, \omega]$

$$\dot{\bar{x}}(n\omega + t) = \dot{x}(t) = f(t, x(t), \varphi * x(t - h), u(t)) =$$

$$= f(n\omega + t, \bar{x}(n\omega + t), \bar{x}(t - h)) = f(n\omega + t, \bar{x}(n\omega + t), \bar{x}((n\omega + t) - h)).$$

Следовательно, $\bar{x}$ — ω-периодическое решение системы (1).

Теорема 1. *Пусть выполняются условия $h_1) - h_4)$. Тогда при любых $u \in U$ существует ω-периодическое решение системы (1).*

Доказательство теоремы 1. Прежде всего отметим, что в силу условия h_4) функция $I(V) := \deg(\operatorname{grad} V, B(0, \rho), 0)$ хорошо определена и отлична от нуля для любого $\rho \geqslant r_1$ (см., например, [6]). Здесь $B(0, \rho)$ — шар в пространстве R радиуса ρ.

Кроме того, для любого $u \in U$ в силу лемм 1 и 2 справедливо

$$\operatorname{Deg}(I - T_u^1, B(0, r), 0) \cap \operatorname{Deg}(I - T_u^0, B(0, r), 0) \neq \{0\}$$

где $B(0, r) \subset \Phi$.

Используя h_3), тот факт, что $I(V) \neq 0$ при любых $\rho \geqslant r_1$, и аргументы, приведенные в работе [7], можно доказать, что

$$\operatorname{Deg}(I - T_u^1, B(0, r), 0) \neq \{0\} \text{ при любых } u \in U.$$

Следовательно, существует ω-периодическое решение системы (1) для любого $u \in U$.

Замечание 2. Условие h_2) можно заменить более слабым требованием:

h_2') существует функция $\sigma: [0, \omega] \times \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, которая удовлетворяет следующим условиям:

a) $|f(t, p, u)| \leqslant \sigma(t, |p|)$ для любых $p = (x, y) \in \mathrm{R}^{2n}$, при всех $|u| \in K$ и п. в. $t \in [0, \omega]$;

b) функция $\sigma(t, r)$ измерима по t для каждого r и непрерывна по r при п. в. $t \in [0, \omega]$;

c) при любом $K>0$ существует такая $\gamma_K \in L^1$, что $|\sigma(t, r)| \leqslant \gamma_K$ при $|r| \leqslant K$ и п. в. t;

d) функция $\sigma(t, r)$ является неубывающей функцией по второй переменной;

e) для любого $(t_0, \alpha) \in [0, \omega] \times \mathbf{R}$ наибольшее решение задачи Коши

$$\dot{\eta}(t) = \sigma(t, \eta(t)) \quad \text{п. в. на } [0, \omega],$$

$$\eta(t_0) = \alpha$$

определено на $[0, \omega]$.

Действительно, если h_2) заменить h_2'), то все предыдущие утверждения остаются в силе. Доказательство этого факта можно найти в работах [6] (следствие 2.3) и [8] (теоремы 3 и замечание 1).

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = r[1 - \beta x(t) - \gamma x(t-h)] x^2(t) + u(t),$$

где $|u| \leqslant 1$.

Нетрудно убедиться, что это уравнение удовлетворяет условиям h_1) — h_3).

Используя те же аргументы, что и при доказательстве леммы 2, можно показать, что при любом заданном законе управления $u \in U$ любое возможное ω-периодическое решение x, соответствующее достаточно большим начальным условиям φ, таково, что $|x(t)|$ и $|x(t-h)|$ больше константы r_1 (из условия h_4)) и имеют одинаковый знак. Следовательно, в этом случае достаточно проверить, выполняется ли условие h_4) для $|x|, |y| > r_1$ и $xy > 0$.

Для этого возьмем $V(x) = -x^2/2$, $x \in \mathbf{R}$. Теперь ясно, что рассматриваемое уравнение имеет ω-периодическое решение при любом $u \in U$.

На рис. 1 и 2 приведены решения, полученные численным методом при двух различных законах управления.

Замечание 3. Отметим, что теорему 1 можно обобщить для дифференциального включения вида

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t), x(t-h), u(t)) \text{ при п. в. } t \in [0, \omega],$$

$$x_0(\theta) = \varphi(\theta) \text{ при } \theta \in [-h, 0].$$

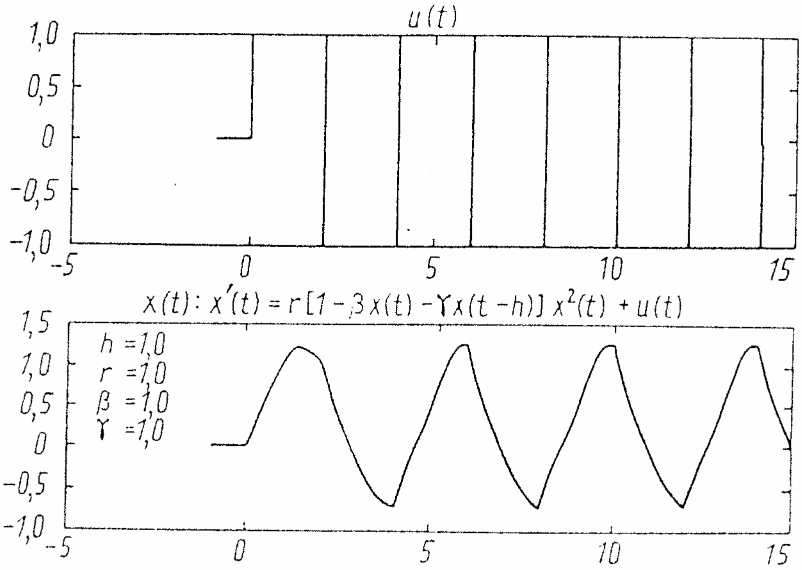

Рис. 1

Предположим, что

h_5) многозначное отображение $(t, x, y) \multimap F(t, x, y) = \{f(t, x, y, u): u \in K\}$ имеет выпуклые значения при п. в. $t \in [0, \omega]$ и любых $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Приведем некоторые результаты, которые будут полезны при последующем рассмотрении. Для любых $\lambda \in [0, 1]$ и $\varphi \in \Phi$ введем многомерный оператор Немыцкого $\mathfrak{F}_\varphi^\lambda: Y \multimap Y$:

$$\mathfrak{F}_\varphi^\lambda(x) = \{z: [0, \omega] \to \mathbb{R}^n, z \text{ измеримо и } z(t) \in F(t, x(t), \varphi * x(t - \lambda h))\}.$$

Справедливо следующее

Утверждение 1. *Пусть выполняются условия h_1), h_2) и h_5). Тогда при любых $(\lambda, \varphi) \in [0, 1] \times \Phi$ многозначное отображение $\mathfrak{F}_\varphi^\lambda$ обладает следующими свойствами:*

a) при всех $x \in Y$ многозначное отображение $\mathfrak{F}_\varphi^\lambda$ является непустым, замкнутым и выпуклым подмножеством множества Y;

b) $\mathfrak{F}_\varphi^\lambda: Y \multimap Y$ замкнуто, т. е. оно отображает замкнутое множество в замкнутое множество;

c) если $x_n \to x$ в Y и $z_n \in \mathfrak{F}_\varphi^\lambda(x_n)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{dist}(z_n, \mathfrak{F}_\varphi^\lambda(x)) = 0$; здесь $\operatorname{dist}(z, A) = \inf\limits_{a \in A} |z - \alpha|$;

d) при каждом $x \in Y$ $\mathfrak{F}_\varphi^\lambda(x) = \{\mathfrak{F}_{\varphi,u}^\lambda(x): u \in U\}$.

Доказательство утверждения 1 приведено в работе [5].

Из этого утверждения следует, что

$$S_\varphi^1 = S(1, \varphi) = \{x \in Y: x \in H_\varphi^1(x)\},$$

где $H_\varphi^1 = iL_\varphi^{-1}\mathfrak{F}_\varphi^1: Y \multimap Y$, является компактным и полунепрерывным сверху в силу условий h_1), h_2) и компактности погружения iX в Y. Более того, можно записать $S_\varphi^1 = \bigcup\limits_{u \in U} S_{\varphi,u}^1$. Следовательно, если для любых $u \in U$ и $\varphi \in \Phi$ множество $S_{\varphi,u}^1$ является синглетоном, то множество ω-периодических решений задачи (1) является множеством $\operatorname{Fix}(T_u^1)$ неподвижных точек отображения T_u^1 и справедливо

$$\bigcup_{u \in U} \operatorname{Fix}(T_u^1) = \operatorname{Fix}(T_u^1),$$

где $T^1 = \bigcup\limits_{u \in U} T_{1,u}$.

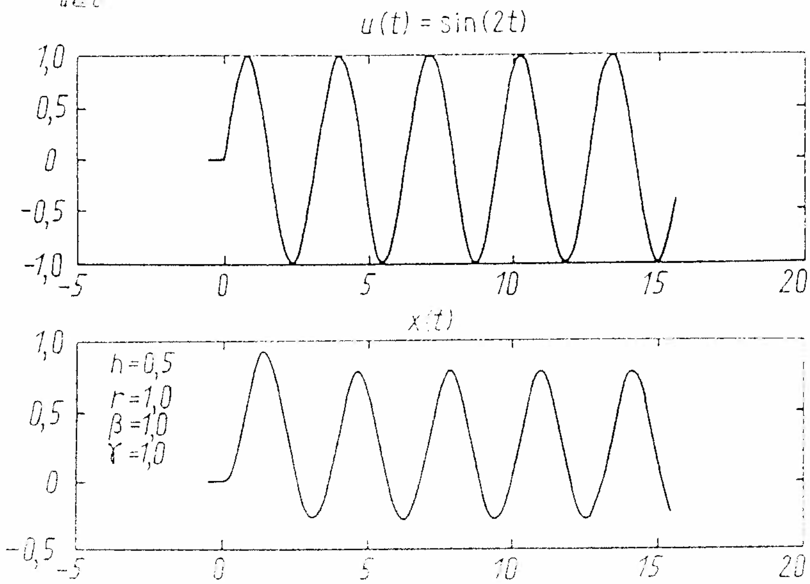

Рис. 2

2. **Задачи оптимизации.** Здесь приведены решения двух оптимизационных задач. В частности, будут рассмотрены два функционала качества и для них среди всех пар (x, u), состоящих из всех ω-периодических решений x задачи (1) и соответствующих им управлений $u \in U$, будут указаны такие пары (x^*, u^*), которые доставляют минимум этим функционалам. В дальнейшем будем обозначать множество таких пар через S.

Первый из рассматриваемых функционалов $C: X \times U \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ имеет вид

$$C(x, u) = \int_{-h}^{0} g_0(\varphi(t))\,dt + \int_{0}^{\omega} f_0(t, x(t), u(t))\,dt + \max_{t \in [0, \omega]} h_0(x(t)), \tag{2}$$

где $\varphi(t) = \tilde{x}(t)$ при $t \in [-h, 0]$, $\tilde{x}$ является ω-периодическим продолжением $x \in X$ на $\mathbb{R}$. Задача заключается в получении достаточных условий на коэффициенты g_0, f_0, h_0, при которых существовала бы такая пара $(x^*, u^*) \in S$, что

$$C(x^*, u^*) = \inf_{(x, u) \in S} C(x, u).$$

Т е о р е м а 2. *Предположим, что для уравнения (1) выполняются условия $h_1) - h_5)$. Кроме того, допустим, что нелинейная функция f удовлетворяет условию Липшица, а именно:*

$h_6)$ *существует такая константа $\Lambda > 0$, что*

$$|f(t, x, y, u) - f(t, x', y', u)| \leqslant \Lambda(|x - x'| + |y - y'|)$$

при п. в. $t \in [0, \omega]$, для любых $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^n$ и $u \in K$.

Рассмотрим функционал $C(x, u)$ вида (2). Предположим, что выполняются следующие условия:

$c_1)$ *отображение $f_0: [0, \omega] \times \mathbb{R}^n \times K \to \mathbb{R}$ измеримо на $[0, \omega]$ при любых $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times K$ и непрерывно на (x, u) при п. в. $t \in [0, \omega]$, отображения $g_0, h_0: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывны;*

$c_2)$ *существуют такие $\mu, \eta \in L^1([0, \omega], \mathbb{R}^+)$, что*

$$|f_0(t, x, u)| \leqslant \mu(t) + \eta(t)|x|$$

при п. в. $t \in [0, \omega]$ и любых $u \in K$;

$c_3)$ *множество $W(t, x, y) = \{(f_0(t, x, u), f(t, x, y, u)), u \in K\}$ выпукло в $\mathbb{R}^{n+1}$ при п. в. $t \in [0, \omega]$ и любых $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.*

Тогда существует оптимальная пара $(x^*, u^*) \in S$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. В силу теоремы 1 имеем, что для любых $u \in U$ $\mathrm{Fix}(T_u^1) \neq 0$. Более того, согласно условию $h_6)$, для любого $\varphi \in \mathrm{Fix}(T_u^1)$ существует единственное ω-периодическое решение x задачи (1). Кроме этого, как уже отмечалось,

$$\bigcup_{u \in U} \mathrm{Fix}(T_u^1) = \mathrm{Fix}(T^1),$$

где $T^1: \Phi \multimap \Phi$ компактно и полунепрерывно сверху. Следовательно, $\mathrm{Fix}(T^1)$ является компактным множеством на Φ, т. е. множество начальных условий для всех ω-периодических решений задачи (1) — компакт на $C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$. Для любых $u \in U$ пусть $\varphi_u \in \mathrm{Fix}(T_u^1)$ — начальное условие ω-периодического решения x_u такое, что

$$C(x_u, u) = \{\inf C(x, u) : x \text{ — } \omega\text{-периодическое решение, соответствующее } u\}.$$

Можно убедиться, что

$$\alpha = \inf_{(x, u) \in S} C(x, u) = \inf_{u \in U} C(x_u, u).$$

Пусть $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — такая минимизирующая последовательность, что

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} \Big(\int_{-h}^{0} g_0(\varphi_{u_n}(t))\,dt + \int_{0}^{\omega} f_0(t, x_n(t), u_n(t))\,dt + \max_{t \in [0, \omega]} h_0(x_{u_n}) \Big).$$

Поскольку $S: \Pi \multimap Y$ — компакт в субнорме и полунепрерывно сверху, то, при необходимости переходя к подпоследовательности, имеем, что $x_{u_*} \to x^*$ равномерно в $C([0, \omega], R^n)$ и соответственно $\varphi_{u_*} \to \varphi^* \in \mathrm{Fix}(T^1)$ равномерно в $C([-h, 0], R^n)$. Здесь φ^* — начальное условие для x^*. Заметим, что x^* — ω-периодическое решение задачи (1), соответствующее некоторому управлению $u^* \in U$. Наконец, добавляя к системе (1) дифференциальную систему

$$\dot{x}_0 = f_0(t, x(t), u(t)) \text{ при п. в. } t \in [0, \omega],$$

$$x_0 = 0,$$

и принимая во внимание условия $c_1)$—$c_3)$ и аргументацию, изложенную в работе [1], получаем, что существует управление $\hat{u}^*$, которое может совпадать с u^*, и такое соответствующее ему ω-периодическое решение x^*, что

$$\alpha = \int_{-h}^{0} g_0(\varphi^*(t))\, dt + \int_{0}^{\omega} f_0(t, x^*(t), \hat{u}^*(t))\, dt + \max_{t \in [0, \omega]} h_0(x^*(t)).$$

Это и заканчивает доказательство.

Перед тем, как перейти к рассмотрению второй задачи, выскажем некоторые предварительные замечания.

Прежде всего напомним, что любую существенно ограниченную функцию $u = (u^r)_{r=1}^m \in L^\infty([0, \omega], R^m)$ при любых фиксированных $r = 1, \ldots, m$ можно рассматривать, за исключением множества меры нуль, как равномерный предел некоторой последовательности простых функций $\{\Phi_n^r\}_{n \in N}$. Эта последовательность определяется суммой

$$\Phi_n^r = \sum_{j=1}^{n \cdot 2^n} \alpha_j^r \chi_{E_j^r}, \quad \alpha_j^r = \operatorname*{ess\,inf}_{t \in E_j^r} u^r(t),$$

где множества E_j^r, $1 \leqslant j \leqslant n \cdot 2^n$, задаются следующим образом:

$$E_j^r = \{t \in [0, \omega] : j \cdot 2^{-n} \leqslant u^r(t) \leqslant (j+1) \cdot 2^{-n}\}.$$

Очевидно, что если u^r — простая функция, то $\Phi_n^r = u^r$ при достаточно больших n. Предполагается, что $\chi_\varnothing = 0$. Для простоты в дальнейшем индекс r будем опускать.

Согласно теореме Витали, имеем, что для всех $1 \leqslant j \leqslant n \cdot 2^n$ существует конечное или счетное семейство невырожденных замкнутых интервалов, не имеющих общих внутренних точек в $\{I_j^k\}_{k=1}^{K(j)}$, таких, что, за исключением множества меры нуль, везде выполняется

$$E_j = \bigcup_{k=1}^{K(j)} I_j^k.$$

Пусть $(\alpha_j^i, \beta_j^i)_{i=1}^{D(j)}$ — связанные компоненты множества $\bigcup_{k=1}^{K(j)} I_j^k$, где D_j конечно или бесконечно, и пусть D_n — множество вида

$$D_n = \{D(1), D(2), \ldots, D(j), \ldots, D(n \cdot 2^n)\}.$$

Рассмотрим теперь последовательность $\{\Phi_n\}_{n \in N}$, где

$$\Phi_n = \sum_{j=1}^{n \cdot 2^n} \alpha_j \chi_{E_j} = \sum_{j=1}^{n \cdot 2^n} \sum_{i \in D(j)} \alpha_j^i \chi_{(\alpha_j^i, \beta_j^i)}, \quad \alpha_j^i = \alpha_j, \quad \forall i \in D(j).$$

Последнее равенство выполняется всюду, за исключением множества меры нуль. Пусть

$$d_n = \sum_{j=1}^{n \cdot 2^n} D(j).$$

прерывно сверху, то,
и, имеем, что $x_{u_n} \to x^*$
$\varphi^* \in \mathrm{Fix}(T^1)$ равно-
зне для x^*. Заметим,
ветствующее некото-
теме (1) дифферен-

ω],

итацию, изложенную
$\hat{u}^*$, которое может
иодическое решение

nax $h_0(x^*(t))$.
[0, ω]

й задачи, выскажем

ограниченную функ-
ованных $r = 1, \dots, m$
ры нуль, как равно-
ых функций $\{\Phi_n^r\}_{n \in N}$.

м образом:

$\cdot 2^{-n}\}$.

$= u^r$ при достаточно
тоты в дальнейшем

$j \leqslant n \cdot 2^n$ существует
кнутых интервалов,
что, за исключением

жества $\bigcup_{k=1}^{K(j)} I_j^k$, где

о вида

$\cdot 2^n)\}$.

$\forall i \in D(j)$.

ючением множества

Следовательно, для любых $1 \leqslant r \leqslant m$ можно определить

$$d(u^r) = \lim_{n \to +\infty} \sup d_n^r \quad \text{и} \quad d(u) = \max\{d(u^r),\ r = 1, \dots, m\}.$$

Теперь сформулируем следующую оптимизационную задачу. Пусть $\mathfrak{G}: X \times U \to \mathrm{R} \cup \{\infty\}$ — функционал качества вида

$$\mathfrak{G}(x, u) = C(x, u) + \eta(u),$$

где C имеет вид (2).

Отметим: штраф $\eta(u)$ означает, что мы платим каждый раз, когда функция управления не является константой либо «скачет».

Задача заключается в определении ограничений на g_0, f_0, h_0 и η, обеспечивающих существование такой оптимальной пары $(x^*, u^*) \in S$, что

$$\mathfrak{G}(x^*, u^*) = \inf_{(x, u) \in S} \mathfrak{G}(x, u).$$

Т е о р е м а 3. *Пусть выполняются условия $h_1)$—$h_4)$, $c_1)$, $c_2)$ теоремы 2. Кроме того, предположим, что функция $\eta: \mathrm{R} \cup \{\infty\} \to \mathrm{R} \cup \{\infty\}$ является непрерывной, неубывающей и неотрицательной функцией и $\eta(\infty) = \infty$. Тогда существует оптимальная пара $(x^*, u^*) \in S$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. Утверждение теоремы является простым следствием теоремы 3.1 из работы [9]. Доказательство основано на том факте, что любая минимизирующая последовательность $\{(x_n, u_n)\}_{n \in N} \subset S$ в силу наличия в функционале качества члена η и в силу полунепрерывности сверху решения имеет подпоследовательность, сходящуюся в $C([0, \omega], \mathrm{R}^n) \times L^\infty([0, \omega], \mathrm{R}^m)$ к паре $(x^*, u^*) \in S$.

Литература

1. N i s t r i P. // Nonlinear analysis TMA. 1983. Vol. 7, N 1. P. 79—90.
2. M a s s a b o I., N i s t r i P., P e j s a c h o w i c z M. P. On the stability of nonlinear equations in Banach spaces // Fixed Point Theorems / E. Fadell and G. Fournier. (Lecture Notes in Math., 1980). P. 270—289.
3. F u r i M., N i s t r i P., P e r a P. and Z e c c a P. // J. Opt. Theory and Appl. 1985. Vol. 45. P. 231—256.
4. C o p p e l l W. A. Stability and asymptotic behavior of differential equations. Heath: Boston, 1965.
5. L a s r y J. M., R o b e r t R. // Cahiers De Math. de la Decision. Ceremade, 1976. Vol. 7611.
6. K r a s n o s e l s k i i M. A., Z a b r e i k o P. P. Geometrical methods of nonlinear analysis. Heidelberg, 1984.
7. C o n t i G., K r y s z e w s k i W., Z e c c a P. // Ann. Mat. Pura e Appl. 1991. Vol. 160. P. 371—408.
8. N i s t r i P. // Boll. Un. Mat. It. Ser. 6. 1986. Vol. V-C, N 1. P. 383—403.
9. N i s t r i P., Z e c c a P. // J. of Opt. Theory and Appl. 1990. Vol. 65, N 2. P. 289—304.

г. Москва

Поступила в редакцию
15 июня 1992 г.