

3.10 Generatori aleatori, simulazione

Abbiamo considerato a varie riprese il problema di calcolare la legge di una v.a. della forma $\phi \circ X$, dove X è una v.a. di cui si conosce la legge. Ora vedremo invece un problema che in un certo senso ne è l'inverso: data una v.a. X di legge uniforme su $[0, 1]$ ed assegnata una densità di probabilità (discreta o continua) f , trovare un'applicazione ϕ tale che $\phi \circ X$ abbia densità f .

Nei problemi di simulazione talvolta si richiede a un computer di produrre dei numeri a caso con una legge assegnata. Ciò si può ottenere nel modo seguente: esistono dei programmi, della cui struttura non ci interesseremo, che producono sequenze di numeri a caso indipendenti e con distribuzione uniforme su $[0, 1]$. Numeri a caso con distribuzione assegnata vengono prodotti appunto costruendo una funzione ϕ tale che se X è uniforme su $[0, 1]$ allora $\phi(X)$ abbia la distribuzione assegnata.

Se la distribuzione voluta è associata ad una densità f che è nulla al di fuori di un intervallo $]a, b[$ e strettamente positiva all'interno di $]a, b[$ allora la relativa funzione di ripartizione F sarà strettamente crescente, e dunque invertibile, da $]a, b[$ in $]0, 1[$. Vedremo ora che la scelta $\phi = F^{-1}$ è quella giusta. Infatti poiché la f.r. di X è data da

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } 1 \leq x \end{cases}$$

e poiché $0 \leq F(t) \leq 1$ allora

$$P\{F^{-1}(X) \leq t\} = P\{X \leq F(t)\} = F(t)$$

e dunque $F^{-1}(X)$ ha proprio F come f.r.

Esempio 3.46 Simuliamo una legge esponenziale di parametro λ .

La f.r. è data da

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

F è invertibile su $\mathbb{R}^+$ e $F^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - x)$. Dunque se X è uniforme su $[0, 1]$ allora $-\frac{1}{\lambda} \log(1 - X)$ è esponenziale di parametro λ .

Questo metodo è però poco efficace quando la funzione F^{-1} non abbia una espressione analitica esplicita, come succede ad esempio per le leggi normali, binomiali e di Poisson, oppure quando si vuole simulare una probabilità su $\mathbb{R}^n$. In alcuni casi (per le leggi $N(0, 1)$ per esempio) si possono usare le tavole della f.r. per avere un'approssimazione di F^{-1} , ma si tratta di una procedura pesante da inserire in un programma di calcolatore. Gli esempi seguenti mostrano altri approcci al problema.

Esempio 3.47 Simuliamo un dado, cioè un numero aleatorio uniforme su $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Se X è uniforme su $[0, 1]$ allora la v.a. Y definita da

$$Y = i \quad \text{se } \frac{i-1}{6} \leq X < \frac{i}{6}$$

segue la distribuzione assegnata. Ciò si può anche esprimere ponendo $Y = \phi(X)$ dove $\phi(x) = [6x] + 1$ ($[\]$ è la funzione parte intera).