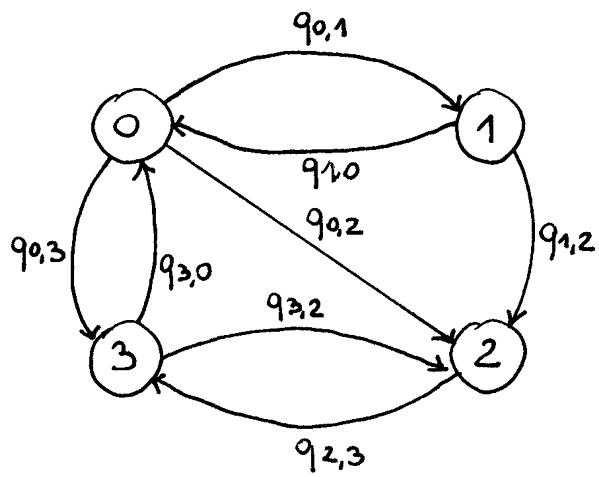
Lezione del 22/01/2010

Esercizio 1

1. La catena di Markov omogenea a tempo continuo equivalente all'automa dato ha grafo di transizione dello stato:



Sfruttando le formule a pag. 5 della lezione del 19/01/2010, abbiamo:

$$\left.\begin{array}{l} q_{0,1} = \lambda_b \\ q_{0,2} = p(2|0,a)\lambda_a \\ q_{0,3} = p(3|0,a)\lambda_a \end{array}\right\} \quad q_{0,0} = -(q_{0,1}+q_{0,2}+q_{0,3})$$

$$\left.\begin{array}{l} q_{1,0} = p(0|1,b)\lambda_b \\ q_{1,2} = \lambda_a \end{array}\right\} \quad q_{1,1} = -(q_{1,0}+q_{1,2})$$

$$\left.\begin{array}{l} q_{2,3} = \lambda_b \end{array}\right\} \quad q_{2,2} = -q_{2,3}$$

$$\left.\begin{array}{l} q_{3,0} = p(0|3,a)\lambda_a + \lambda_b \\ q_{3,2} = p(2|3,a)\lambda_a \end{array}\right\} \quad q_{3,3} = -(q_{3,0}+q_{3,2})$$

Il testo fornisce i valori di λ_a, λ_b, $p(0|0,a)$, $\cancel{p(2|0,a)}$ e $p(1|1,b)$.
Inoltre, fornisce $P(X_{k+1}=0 \mid X_k=3)$.
Dobbiamo ricavare $p(3|0,a)$, $p(0|1,b)$, $p(0|3,a)$ e $p(2|3,a)$. Abbiamo:

$$p(3|0,a) = 1 - p(0|0,a) - p(2|0,a) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$p(0|1,b) = 1 - p(1|1,b) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Per quanto riguarda $p(0|3,a)$ osserviamo che:

$$P(X_{k+1}=0|X_k=3) = P(X_{k+1}=0|X_k=3, E_{k+1}=a)P(E_{k+1}=a|X_k=3) +$$
$$+ P(X_{k+1}=0|X_k=3, E_{k+1}=b)P(E_{k+1}=b|X_k=3)$$
$$= p(0|3,a)\cdot\frac{\lambda_a}{\lambda_a+\lambda_b} + 1\cdot\frac{\lambda_b}{\lambda_a+\lambda_b}$$

Da cui:

$$\frac{8}{9} = p(0|3,a)\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \implies p(0|3,a) = \frac{2}{3}$$

Inoltre:

$$p(2|3,a) = 1 - p(0|3,a) = \frac{1}{3}.$$

La catena di Markov omogenea a tempo continuo equivalente all'automa dato è dunque definita dalla terna $(\mathcal{X}, \pi(0), Q)$, dove:

- $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3\}$
- $\pi(0) = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$

  Nell'automa osserviamo che $x_0 = 0$ (stato iniziale deterministico)

- $Q = \begin{bmatrix} q_{0,0} & q_{0,1} & q_{0,2} & q_{0,3} \\ q_{1,0} & q_{1,1} & q_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,2} & q_{2,3} \\ q_{3,0} & 0 & q_{3,2} & q_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \cdots & \end{bmatrix}$

Esercizio 2

i) Può convenire in questo caso passare prima per la costruzione di un automa a stati stocastico con temporizzazione esponenziale che modella il sistema dato.

stato: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$x_1 \longrightarrow$ numero di pezzi nel sistema: $x_1 \in \{0,1,2\}$

$x_2 \longrightarrow$ stato della lavorazione: $x_2 \in \{0,1,2\}$

0 → nessuna lavorazione; 1 → 1ª lavorazione; 2 → 2ª lavorazione

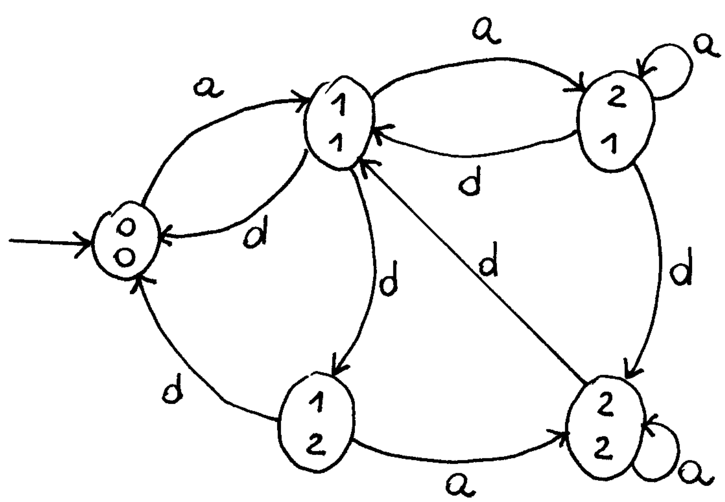
NOTA: si osservi che lo stato definito solo da x_1 non basta ... se non altro, per rispondere alla domanda ii)!!! ;-)

spazio di stato: $\mathcal{X} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

eventi $\mathcal{E} = \{a, d\}$

a → arrivo di un nuovo pezzo; d → terminazione di una lavorazione

grafo di transizione:



con:

$$p\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, d\right) = 1-p$$

$$p\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, d\right) = p$$

$$p\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, d\right) = 1-p$$

$$p\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, d\right) = p$$

Per passare alla catena di Markov omogenea a tempo continuo equivalente all'automa dato, numeriamo gli stati:

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow 0$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow 1$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow 2$

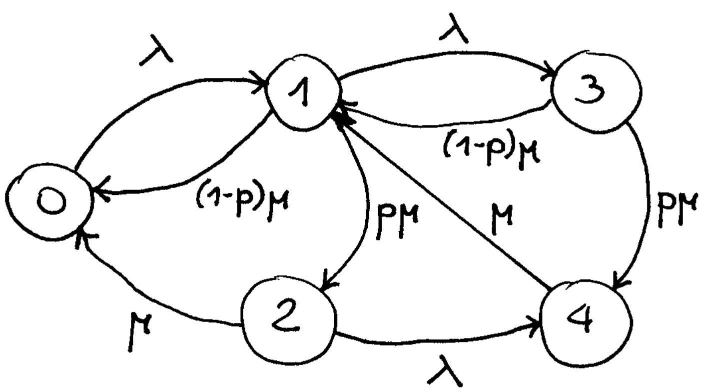
$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow 3$

$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow 4$

La catena è definita dalla terna $(\mathcal{X}, \pi(0), Q)$, con:

- $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
- $\pi(0) = [1 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0]$

  si ipotizza che la stazione di lavorazione sia inizialmente vuota (stato iniziale deterministico)
- Q definita in accordo al grafo di transizione:



$$\Rightarrow Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ (1-p)\mu & -(\lambda+\mu) & p\mu & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & -(\lambda+\mu) & 0 & \lambda \\ 0 & (1-p)\mu & 0 & -\mu & p\mu \\ 0 & \mu & 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{7}{16} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{7}{16} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ii) Chiamato $\pi = [\pi_0 \; \pi_1 \; \pi_2 \; \pi_3 \; \pi_4]$ il vettore delle probabilità stazionarie degli stati, a noi interessano i valori π_2 e π_4 corrispondenti agli stati in cui c'è un pezzo in rilavorazione.

Osserviamo che la catena è irriducibile e finita (quindi con tutti stati ricorrenti positivi) e π si può calcolare come unica soluzione del sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \pi Q = 0 \\ \sum_{i=0}^{4} \pi_i = 1 \end{cases}$$

Risulta:

$$\pi = \left[\frac{92}{173} \quad \frac{48}{173} \quad \frac{4}{173} \quad \frac{24}{173} \quad \frac{5}{173} \right]$$

Dunque:

$$\pi_2 = \frac{4}{173} \simeq 0.0231$$

$$\pi_4 = \frac{5}{173} \simeq 0.0289$$

iii) La probabilità richiesta coincide con la <u>probabilità di blocco P_B</u>.

Nel caso che stiamo considerando:

$$P_B = P(\text{un pezzo in arrivo trova } X=3 \text{ oppure } X=4)$$

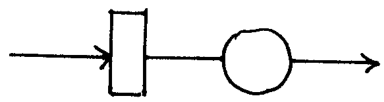
$$= \alpha_3 + \alpha_4$$

usando la notazione di pag. 3 della lezione del 21/01/2010

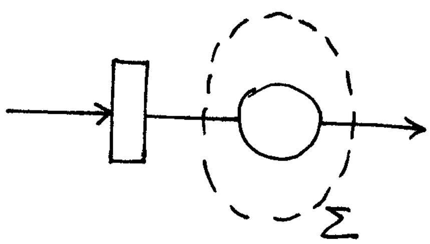
Osserviamo che, in base al testo, gli arrivi di pezzi sono generati da un processo di Poisson. Possiamo dunque applicare la proprietà PASTA, per la quale:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_3 = \pi_3 \\ \alpha_4 = \pi_4 \end{array}\right\} \Rightarrow P_B = \pi_3 + \pi_4 = \frac{29}{173} \simeq 0.1676$$

iv) Il sistema considerato può essere rappresentato nel seguente modo:



Dovendo calcolare $E[Z]$, dove Z è il tempo di lavorazione totale (inclusa una eventuale rilavorazione) di un generico pezzo a regime, e osservando che Z coincide con il tempo di soggiorno di un pezzo nella macchina, in vista di applicare la Legge di Little consideriamo una curva chiusa che racchiude solo la macchina:



Per la Legge di Little:

$$E[Z] = E[S_\Sigma] = \frac{E[X_\Sigma]}{\lambda_\Sigma}$$

Osserviamo che, per la condizione di bilanciamento dei flussi a regime, risulta

$$\lambda_\Sigma = \lambda_{eff} = \lambda(1 - \pi_3 - \pi_4) = \frac{36}{173} \simeq 0.2081$$

essendo $\pi_3 + \pi_4$ la prob. a regime che il sistema sia pieno

Inoltre:

$$E[X_\Sigma] = 0 \cdot \pi_0 + 1 \cdot (\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4) = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 - \pi_0 = \frac{81}{173} \simeq 0.4882$$

$$X_\Sigma = \begin{cases} 0 & \text{se } X = 0 \\ 1 & \text{se } X = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

Quindi: $E[Z] = \dfrac{\frac{81}{173}}{\frac{36}{173}} = \dfrac{81}{36} = \dfrac{9}{4} = 2.25$

NOTA - Si osservi che:

$$E[Z] > \frac{1}{\mu} = 2$$

$$E[Z] < \frac{2}{\mu} = 4$$

Esattamente:

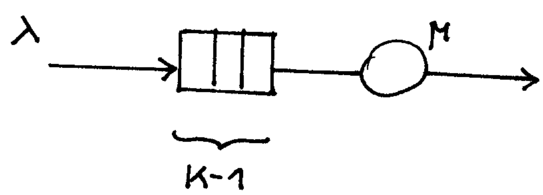
$$E[Z] = (1+p)\frac{1}{\mu}$$

Se p varia nell'intervallo $(0,1)$, $E[Z]$ varia nell'intervallo $(\frac{1}{\mu}, \frac{2}{\mu})$.

Perché?

Esercizio 3

coda M/M/1/K



$\lambda = 1.5$ arrivi/min

$\mu = 0.5$ servizi/min

I problemi considerati possono essere così riformulati (ipotizzando di essere a regime):

a) $$\min_K E[S]$$

b) $$\min_K K$$

s.t.

$$E[S] \geq 2E[Z]$$

1. Il problema a) è il più semplice tra i due. Infatti, ricordiamo che

$$S = W + Z$$

e quindi, passando ai valori attesi:

$$E[S] = E[W] + \underbrace{E[Z]}_{= \frac{1}{\mu}} = E[W] + \frac{1}{\mu}$$

Quindi minimizzare $E[S]$ si può ottenere solo minimizzando $E[W]$.

tempo medio di attesa

$E[W]$ si minimizza eliminando <u>l'attesa</u>!

cioè, eliminando lo spazio di accodamento: $\boxed{K=1}$

Se $K>1$, essendoci posto nello spazio di accodamento, accadrà che alcuni clienti aspetteranno, quindi $E[W]>0$, in generale.

2. Risolviamo il problema b).

Per farlo, occorre esprimere $E[S]$ in funzione di K.

Applicando la Legge di Little a tutto il sistema, abbiamo:

$$E[S] = \frac{E[X]}{\lambda_{eff}}$$

dove $\lambda_{eff} = \lambda(1-\pi_K)$

Utilizzando per π_K e $E[X]$ i valori ricavati a pag. 8 e 9 della lezione del 21/01/2010, rispettivamente, cioè:

$$\pi_K = \rho^K \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$$

$$\boxed{\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3}$$

$$E[X] = \frac{\rho}{1-\rho^{K+1}}\left(\frac{1-\rho^K}{1-\rho} - K\rho^K\right)$$

otteniamo:

$$E[S] = \frac{\frac{\rho}{1-\rho^{K+1}}\left(\frac{1-\rho^K}{1-\rho} - K\rho^K\right)}{\lambda\left(1-\rho^K\frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\right)}$$

Dobbiamo ora determinare il minimo K tale che

$$E[S] \geq 2E[Z] = 2 \cdot 2 = 4$$

Per $K=1$, $E[S]=2$ (ovviamente! perche'?) NON VA BENE

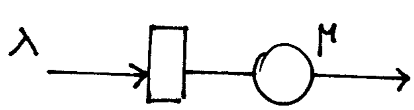
Per $K=2$, $E[S]=3.5$ NON VA BENE

Per $K=3$, $E[S] \simeq 5.2308$ OK!

Quindi la soluzione e' $\boxed{K=3}$.

Esercizio 4

Coda M/M/1/2



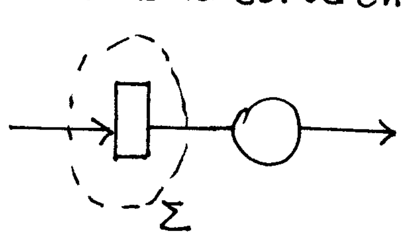
dati del problema:

$\mu_{eff} = 3$ pezzi/min

$\frac{1}{\mu} = 15$ sec $\Rightarrow$ $\mu = 4$ pezzi/min

i) Dobbiamo calcolare $E[W]$, a regime.

Considerando la curva chiusa che racchiude solo il buffer:



abbiamo che il tempo di soggiorno S_Σ coincide con il tempo di attesa W, e quindi dalla legge di Little:

$$E[W] = \frac{E[X_\Sigma]}{\lambda_\Sigma}$$

dove:

$\lambda_\Sigma = \lambda_{eff} = \mu_{eff}$ (per la condizione di bilanciamento dei flussi a regime)

mentre, risultando:

$$X_\Sigma = \begin{cases} 0 & \text{se } X=0,1 \\ 1 & \text{se } X=2 \end{cases}$$ (X è il numero di pezzi nel sistema)

si ha:

$$E[X_\Sigma] = 0 \cdot (\pi_0 + \pi_1) + 1 \cdot \pi_2 = \pi_2 .$$

Per π_2 potremmo utilizzare il valore ricavato a pag. 8 della lezione del 21/01/2010, cioè:

$$\pi_2 = \rho^2 \frac{1-\rho}{1-\rho^3}$$ (essendo $K=2$).

Tuttavia, non conosciamo ρ, perché $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ con λ non noto.
Dobbiamo ricavare ρ.
Per farlo, osserviamo che

$$\mu_{eff} = \mu(1-\pi_0) \quad \Rightarrow \quad \pi_0 = 1 - \frac{\mu_{eff}}{\mu} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Utilizzando per π_0 il valore ricavato ancora a pag. 8 della lezione del 21/01/2010, cioè:

$$\pi_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^3} = \frac{1}{1+\rho+\rho^2}$$

otteniamo che ρ è soluzione dell'equazione di 2° grado:

$$1+\rho+\rho^2=4 \implies \rho^2+\rho-3=0$$

Tale equazione ha due soluzioni, una positiva e una negativa. Quella negativa ovviamente è da scartare, quindi l'unica soluzione ammissibile è:

$$\rho = \frac{\sqrt{13}-1}{2} \simeq 1.3028$$

Sostituendo ρ nell'espressione di π_2, si ha:

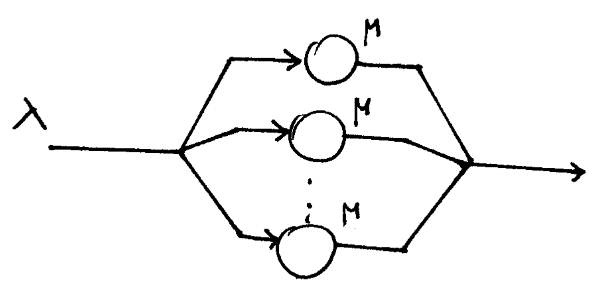
$$\pi_2 = \frac{7-\sqrt{13}}{8} \simeq 0.4243$$

e quindi:

$$E[W] = \frac{\pi_2}{\mu_{eff}} = \frac{\frac{7-\sqrt{13}}{8}}{3} = \frac{7-\sqrt{13}}{24} \simeq 0.14 \text{ min} \simeq 8.5 \text{ sec.}$$

Esercizio 5

coda M/M/K/K ⇝ solo serventi in parallelo, non c'è spazio di accodamento



K serventi

$\lambda = 40$ clienti/ora

$\mu = 60$ clienti/ora

i) Mettiamoci nella situazione a regime.
Quanto vale la perdita oraria media?

perdita oraria media = perdita per cliente × numero medio orario di clienti respinti

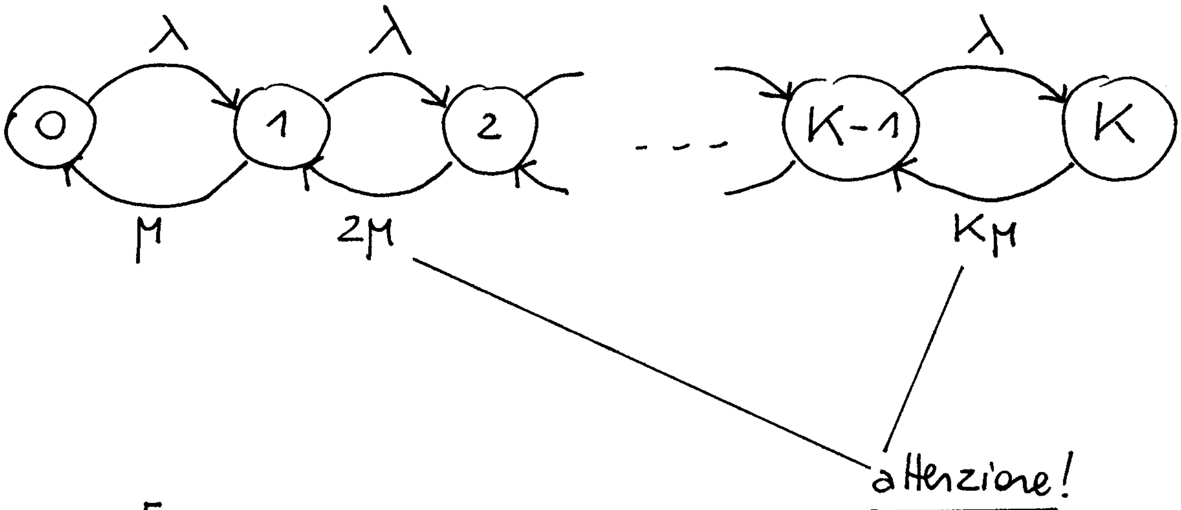
$$= 2\cdot(\lambda-\lambda_{eff}) = 2\cdot[\lambda-\lambda(1-\pi_K)] = 2\lambda\pi_K$$

Tale perdita non deve eccedere 10€. Dunque:

$$2\lambda\pi_K \leq 10 \implies \lambda\pi_K \leq 5 \iff \pi_K \leq \frac{5}{40} = \frac{1}{8} = 0.125.$$

Dobbiamo dunque esprimere π_K in funzione di K, e determinare il minimo K per cui è soddisfatto il vincolo $\pi_K \leq 0.125$.

Per calcolare π_K, modelliamo la coda di servizio Markoviana come una catena di Markov omogenea a tempo continuo, che utilizzeremo poi per il calcolo della distribuzione di probabilità stazionaria degli stati.



$$\implies Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & & \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & & \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \lambda \\ & & & & K\mu & -K\mu \end{bmatrix}$$

Essendo la catena irriducibile e finita (quindi con tutti stati ricorrenti positivi) il vettore $\pi = [\pi_0\ \pi_1 \ldots \pi_K]$ delle probabilità stazionarie dello stato si può ottenere come l'unica soluzione del sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \pi Q = 0 \\ \sum_{i=0}^{K} \pi_i = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 = 0 \\ \lambda\pi_0 - (\lambda+\mu)\pi_1 + 2\mu\pi_2 = 0 \\ \lambda\pi_1 - (\lambda+2\mu)\pi_2 + 3\mu\pi_3 = 0 \\ \quad\vdots \\ \lambda\pi_{K-2} - (\lambda+(K-1))\pi_{K-1} + K\mu\pi_K = 0 \\ \lambda\pi_{K-1} - K\mu\pi_K = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \ldots + \pi_K = 1 \end{cases}$$

Sommando la 1^a e la 2^a riga otteniamo:

$$-\lambda\pi_1 + 2\mu\pi_2 = 0$$

Sommando la 1^a, la 2^a e la 3^a riga otteniamo:

$$-\lambda\pi_2 + 3\mu\pi_3 = 0$$

ecc.

Il sistema di equazioni diventa dunque:

$$\begin{cases} -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 = 0 \\ -\lambda\pi_1 + 2\mu\pi_2 = 0 \\ -\lambda\pi_2 + 3\mu\pi_3 = 0 \\ \quad\vdots \\ -\lambda\pi_{K-1} + K\mu\pi_K = 0 \\ \cancel{\lambda\pi_{K-1} - K\mu\pi_K = 0} \\ \pi_0 + \pi_1 + \ldots + \pi_K = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = \rho\pi_0 \quad \text{con } \boxed{\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3}} \\ \pi_2 = \frac{1}{2}\rho\pi_1 = \frac{1}{2}\rho^2\pi_0 \\ \pi_3 = \frac{1}{3}\rho\pi_2 = \frac{1}{2\cdot 3}\rho^3\pi_0 \\ \quad\vdots \\ \pi_K = \frac{1}{K}\rho\pi_{K-1} = \frac{1}{K!}\rho^K\pi_0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \ldots + \pi_K = 1 \end{cases}$$

ridondante!

Sostituendo nell'ultima equazione abbiamo:

$$\left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \ldots + \frac{\rho^K}{K!}\right)\pi_0 = 1 \Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \ldots + \frac{\rho^K}{K!}}$$

$$\Rightarrow \pi_K = \frac{\frac{\rho^K}{K!}}{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \ldots + \frac{\rho^K}{K!}}$$

Ricordiamo che si deve verificare $\pi_K \leq 0.125$.

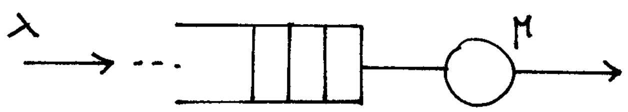
Per $K=1$, $\pi_1 = \dfrac{\rho}{1+\rho} = \dfrac{2}{5} = 0.4$ <u>non va bene</u>

Per $K=2$, $\pi_2 = \dfrac{\frac{\rho^2}{2}}{1+\rho+\frac{\rho^2}{2}} = \dfrac{2}{17} \simeq 0.1176$ <u>ok</u>

Dunque la soluzione è $\boxed{K=2}$.

Esercizio 6

coda M/M/1 $\rightsquigarrow$ coda di capacità infinita, un solo servente



$\dfrac{1}{\mu} = 1.25 \text{ sec} \Rightarrow \mu = \dfrac{4}{5} = 0.8$ processi/sec

i) Siamo <u>a regime</u>. Dobbiamo risolvere il problema di ottimizzazione:

$$\max_{\lambda} \lambda$$
$$\text{s.t.}$$
$$E[S] \leq 2$$

<u>ATTENZIONE</u>! Essendo nel caso di <u>coda con capacità infinita</u>, per l'esistenza della situazione a regime occorre che sia verificata la condizione

$$\frac{\lambda}{\mu} < 1 \Rightarrow \lambda < \mu = 0.8$$

Quindi λ non potrà eccedere il valore 0.8

Applicando la Legge di Little a tutto il sistema otteniamo che

$$E[S] = \frac{E[X]}{\lambda_{eff}}$$

dove

$\lambda_{eff} = \lambda$ (la coda ha capacità infinita, tutti gli arrivi vengono accettati)

e

$$E[X] = \frac{\rho}{1-\rho} \quad , \quad \text{dove} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

formula a pag. 6 della lezione del 21/01/2010

Abbiamo dunque:

$$E[S] = \frac{\frac{\rho}{1-\rho}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

Il vincolo è dunque:

$$\frac{1}{\mu-\lambda} \leq 2 \quad \Rightarrow \quad \mu-\lambda \geq 0.5 \quad \Rightarrow \quad \lambda \leq \mu - 0.5 = 0.8 - 0.5 = 0.3$$

Quindi la soluzione è $\boxed{\lambda = 0.3}$.

Notare che, essendo $0.3 < 0.8$, è soddisfatta la condizione $\frac{\lambda}{\mu} < 1$.