In questa lezione, studieremo le relazioni esistenti tra due classi di modelli di sistemi ad eventi discreti: gli <u>automi a stati stocastici con temporizzazione esponenziale</u> e le <u>catene di Markov omogenee a tempo continuo</u>.

Il primo risultato è il seguente:

> Una catena di Markov omogenea a tempo continuo $(\mathcal{X}, \pi(0), Q)$ è un caso particolare di automa a stati stocastico $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, f, p_0, F)$ con temporizzazione esponenziale.

<u>dimostrazione</u> - Occorre definire la sestupla $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, f, p_0, F)$:

- gli eventi di $\mathcal{E}$ sono le <u>transizioni di stato</u>

  $e_{i,j}$ = transizione dallo stato i allo stato j, $j \neq i$.
- lo spazio di stato $\mathcal{X}$ dell'automa coincide con quello della catena.
- $\forall i \in \mathcal{X}. \quad \Gamma(i) = \{ e_{i,j} \in \mathcal{E} : q_{i,j} > 0 \}$
- $f(i, e_{i,j}) = j$ definita solo per $e_{i,j} \in \Gamma(i)$, $i \in \mathcal{X}$
- $\forall i \in \mathcal{X}. \quad p_0(i) = P(X(0) = i) = \pi_i(0)$
- $F = \{ F_{e_{i,j}} : e_{i,j} \in \mathcal{E} \}$, dove $F_{e_{i,j}}(t) = 1 - e^{-q_{i,j} t}$, $t \geq 0$

  distribuzione di probabilità della durata di vita dell'evento $e_{i,j}$.

Occorre poi dimostrare che la dinamica dello stato dell'automa così definito è equivalente, dal punto di vista stocastico, alla dinamica dello stato della catena.

Dalla dinamica di temporizzazione degli eventi di un automa a stati stocastico sappiamo che:

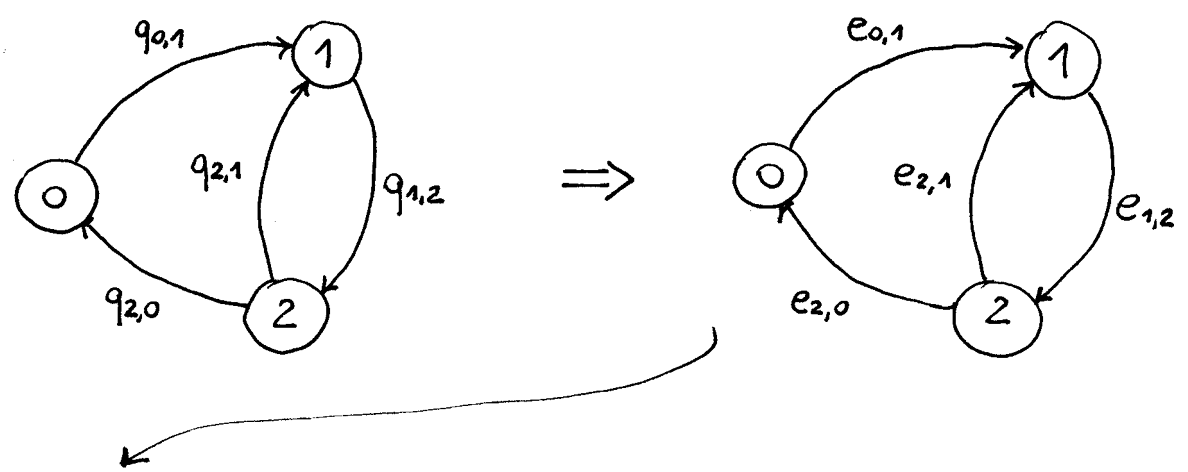
$$Y_k^* = \min_{e \in \Gamma(X_k)} Y_{e,k}$$

dove X_k e' lo stato dopo il k-esimo evento, $Y_{e,k}$ sono le durate di vita residue degli eventi possibili in X_k, e Y_k^* e' l'intertempo tra il k-esimo e il (k+1)-esimo evento.

Dato che le durate di vita degli eventi sono esponenziali, sappiamo che Y_k^* (essendo una sovrapposizione di variabili aleatorie esponenziali) e' anch'essa esponenziale con tasso $\sum_{e_i \in \Gamma(X_k)} q_{i,j}$.

D'altra parte, gli eventi dell'automa sono proprio le transizioni di stato, e quindi Y_k^* coincide con il <u>tempo di soggiorno</u> nello stato X_k, cioe' $V(X_k)$. Posto $X_k = i$, risulta che $V(i)$ segue una distribuzione esponenziale con tasso $\sum_{e_{i,j} \in \Gamma(i)} q_{i,j} = \sum_{j \neq i} q_{i,j} = -q_{i,i}$, che e' la medesima distribuzione di $V(i)$ nella catena. $\square$

<u>esempio</u>



$(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, f, p_0, F)$ dove:

- $\mathcal{E} = \{e_{0,1}, e_{1,2}, e_{2,0}, e_{2,1}\}$
- $\mathcal{X} = \{0, 1, 2\}$
- $\Gamma(0) = \{e_{0,1}\}$, $\Gamma(1) = \{e_{1,2}\}$
  $\Gamma(2) = \{e_{2,0}, e_{2,1}\}$
- $f(0, e_{0,1}) = 1$, $f(1, e_{1,2}) = 2$
  $f(2, e_{2,0}) = 0$, $f(2, e_{2,1}) = 1$
- $p_0(0) = \pi_0(0)$, $p_0(1) = \pi_1(0)$, $p_0(2) = \pi_2(0)$
- $F_{e_{i,j}}(t) = 1 - e^{-q_{i,j} t}$, $t \geq 0$ $\forall e_{i,j} \in \mathcal{E}$.

Dato che una catena di Markov omogenea a tempo continuo può essere vista come un particolare automa a stati stocastico con temporizzazione esponenziale, possiamo calcolare per la catena tutte le probabilità condizionali che abbiamo visto nel caso degli automi.

Supponiamo che le transizioni di stato (gli eventi della catena) avvengano agli istanti aleatori $T_1 < T_2 < \ldots < T_k < \ldots$, e chiamiamo X_k lo stato dopo la k-esima transizione (X_0 è lo stato iniziale).

Poniamo:

$$p_{i,j} = P(X_{k+1} = j \mid X_k = i)$$ - probabilità di transizione in un passo -

ATTENZIONE! Qui il passo è scandito dall'accadimento degli eventi, non dall'orologio...

Abbiamo, per $j \neq i$:

$$p_{i,j} = P(\text{evento } e_{i,j}) = \frac{q_{i,j}}{\Lambda(i)} = \frac{q_{i,j}}{-q_{i,i}}$$

$$\Lambda(i) = \sum_{j \neq i} q_{i,j} = -q_{i,i}$$

mentre per $j = i$:

$p_{i,i} = 0$ perchè un evento cambia lo stato.

Possiamo anche costruire la matrice delle probabilità di transizione in un passo:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{q_{0,1}}{-q_{0,0}} & \frac{q_{0,2}}{-q_{0,0}} & \cdots \\ \frac{q_{1,0}}{-q_{1,1}} & 0 & \frac{q_{1,2}}{-q_{1,1}} & \cdots \\ \frac{q_{2,0}}{-q_{2,2}} & \frac{q_{2,1}}{-q_{2,2}} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

ATTENZIONE: Nel caso di catene di Markov omogenee a tempo discreto gli elementi lungo la diagonale principale di P possono essere non nulli perchè il tempo è scandito dall'orologio, e a ogni istante di tempo si possono verificare cambi di stato oppure no. Nel caso che stiamo considerando il passo è proprio scandito dai cambi di stato...

Il secondo risultato fondamentale e' il seguente:

> Dato un automa a stati stocastico $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, p, p_0, F)$ con temporizzazione esponenziale, cioe' $F = \{F_e : e \in \mathcal{E}\}$ con $F_e(t) = 1 - e^{-\lambda_e t}$, $t \geq 0$, esiste sempre una catena di Markov omogenea a tempo continuo $(\mathcal{X}, \pi(0), Q)$ avente comportamento stocastico equivalente a quello dell'automa dato.

<u>dimostrazione</u> - Occorre definire la terna $(\mathcal{X}, \pi(0), Q)$:

- lo spazio di stato $\mathcal{X}$ della catena coincide con quello dell'automa.
- $\forall i \in \mathcal{X}.\ \pi_i(0) = P(X(0) = i) = p_0(i)$
- Per quanto riguarda la matrice dei tassi di transizione, ragioniamo in termini di comportamento stocastico equivalente tra la catena e l'automa.

  Fissato uno stato $i \in \mathcal{X}$, la distribuzione di probabilità del tempo di soggiorno nello stato i deve essere identica nella catena e nell'automa.

  Nel caso della catena sappiamo che $V(i)$ dovrà seguire una distribuzione esponenziale con tasso $-q_{i,i} = \sum_{j \neq i} q_{i,j}$. Nel caso dell'automa:

$$P(V(i) > t) = P(\text{nessuna transizione di stato in } [0,t] \mid X(0) = i)$$

$$= P\Big(\bigcap_{e \in \Gamma(i)} \text{nessuna transizione di stato dovuta all'evento } e \text{ in } [0,t]\Big)$$

indipendenza

$$= \prod_{e \in \Gamma(i)} P(\text{nessuna transizione di stato dovuta all'evento } e \text{ in } [0,t])$$

$$= \prod_{e \in \Gamma(i)} P\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} \text{l'evento } e \text{ accade } n \text{ volte in } [0,t] \text{ e non determina alcuna transizione di stato}\Big)$$

$$= \prod_{e \in \Gamma(i)} \sum_{n=0}^{\infty} P(\text{l'evento } e \text{ accade } n \text{ volte in } [0,t]) \cdot P(n \text{ occorrenze dell'evento } e \text{ non determinano alcuna transizione di stato})$$

Poisson

$$= \prod_{e\in\Gamma(i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_e t)^n}{n!} e^{-\lambda_e t} \cdot p(i|i,e)^n \qquad \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$$= \prod_{e\in\Gamma(i)} e^{p(i|i,e)\lambda_e t} \cdot e^{-\lambda_e t}$$

$$= \prod_{e\in\Gamma(i)} e^{-(1-p(i|i,e))\lambda_e t}$$

$$= \prod_{e\in\Gamma(i)} e^{-\left(\sum_{j\neq i} p(j|i,e)\right)\lambda_e t}$$

$$= e^{-\left(\sum_{e\in\Gamma(i)} \sum_{j\neq i} p(j|i,e)\lambda_e\right)t}$$

$$= e^{-\left(\sum_{j\neq i} \sum_{e\in\Gamma(i)} p(j|i,e)\lambda_e\right)t}$$

Quindi nel caso dell'automa $V(i)$ segue una distribuzione esponenziale con tasso

$$\sum_{j\neq i} \sum_{e\in\Gamma(i)} p(j|i,e)\lambda_e$$

Dovrà dunque essere:

$$\boxed{q_{i,i} = -\sum_{j\neq i} \sum_{e\in\Gamma(i)} p(j|i,e)\lambda_e}$$

e, dalla relazione $q_{i,i} = -\sum_{j\neq i} q_{i,j}$:

$$\boxed{q_{i,j} = \sum_{e\in\Gamma(i)} p(j|i,e)\lambda_e \quad \text{per ogni } j\neq i}$$

□

COMMENTI

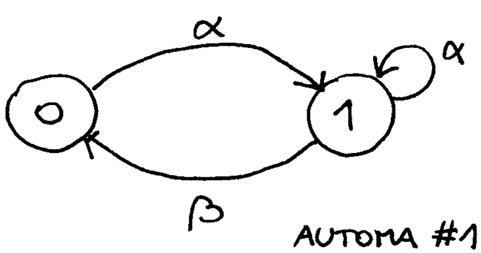
- Nella rappresentazione di un SED come catena di Markov omogenea a tempo continuo si perde il dettaglio sugli eventi "fisici" del sistema (gli eventi della catena sono le transizioni di stato).

- È utile modellare un SED come catena di Markov omogenea a tempo continuo quando il focus è sullo stato del sistema e sulla sua dinamica, non sugli eventi.

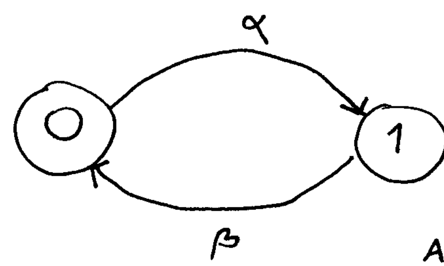
↘ Il modello di Markov permette di calcolare quantità del tipo

$$P(X(t)=i) \quad \text{oppure} \quad \lim_{t\to\infty} P(X(t)=i).$$

<u>ATTENZIONE</u>: Consideriamo i due automi a stati:



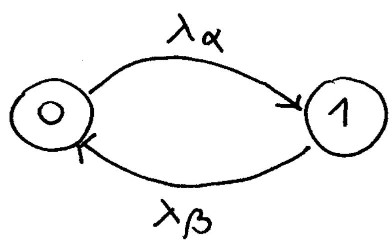
AUTOMA #1



AUTOMA #2

in cui le durate di vita degli eventi α e β seguono distribuzioni esponenziali con tassi λ_α e λ_β, rispettivamente.

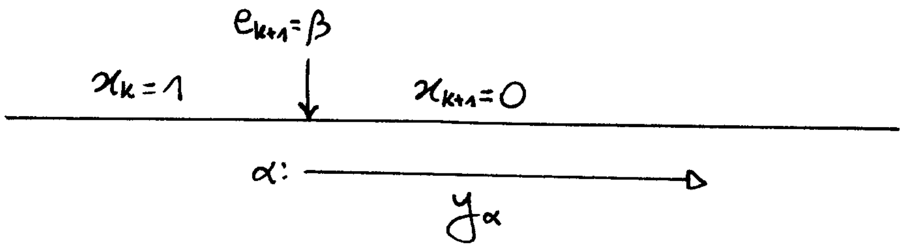
Per entrambi gli automi il modello di Markov equivalente è il seguente:



Quindi:

- la trasformazione da automa a stati stocastico con temporizzazione esponenziale a catena di Markov omogenea a tempo continuo <u>NON È BIUNIVOCA</u>.
- la distribuzione di probabilità degli stati è la stessa per i due automi (supponendo identica distribuzione di probabilità dello stato iniziale), nonostante essi siano diversi. Perché?

Conseguenza della <u>proprietà di mancanza di memoria</u> della distribuzione esponenziale...



nel caso dell'automa #1 è una <u>durata di vita residua</u>, mentre
nel caso dell'automa #2 è una <u>durata di vita totale</u>,
ma in entrambi i casi la distribuzione di probabilità di y_α
è identica!