Significato "fisico" dei tassi di transizione

Consideriamo il tempo di soggiorno in uno stato della catena:

$V(i)$ = tempo di soggiorno nello stato $i \in \mathcal{X}$

$V(i)$ è una variabile aleatoria continua che può assumere valori in $(0,+\infty)$.

Consideriamo la distribuzione di probabilità di $V(i)$:

$$F_i(t) = P\left(V(i) \leq t\right), \quad t \geq 0$$

Da cui, scegliendo $\delta t \geq 0$:

$$\begin{aligned} F_i(t+\delta t) - F_i(t) &= P\left(t < V(i) \leq t+\delta t\right) \\ &= P\left(V(i) \leq t+\delta t \,|\, V(i) > t\right) P\left(V(i) > t\right) \\ &= P\left(V(i) \leq t+\delta t \,|\, V(i) > t\right)\left(1 - F_i(t)\right) \end{aligned}$$

Supponiamo δt sufficientemente piccolo cosicché nell'intervallo $(t, t+\delta t]$ possa avvenire al più una sola transizione di stato. Ricordiamo che:

$$p_{i,j}(\delta t) = q_{i,j}\,\delta t + o(\delta t) \qquad \text{per } j \neq i.$$

Da cui:

$$P\left(V(i) \leq t+\delta t \,|\, V(i) > t\right) = P\left(\text{una transizione di stato in } (t, t+\delta t] \,\middle|\, X(t) = i\right)$$

$$= \sum_{j \neq i} p_{i,j}(\delta t) = \sum_{j \neq i} q_{i,j}\,\delta t + o(\delta t) = \Lambda(i)\,\delta t + o(\delta t)$$

avendo posto: $\Lambda(i) = \sum_{j \neq i} q_{i,j} \underset{\text{proprietà di } Q}{=} -q_{i,i}$

Dunque:

$$\frac{F_i(t+\delta t) - F_i(t)}{\delta t} = \left(\Lambda(i) + o(1)\right)\left(1 - F_i(t)\right)$$

Prendendo il limite per $\delta t \to 0$:

$$\boxed{\frac{dF_i(t)}{dt} = \Lambda(i)\left(1-F_i(t)\right)}$$

equazione differenziale lineare stazionaria da risolversi con condizione iniziale $F_i(0) = P(V(i) \leq 0) = 0$ perchè $V(i) > 0$.

Possiamo riscrivere l'equazione precedente nella forma:

$$\frac{d\left(1-F_i(t)\right)}{dt} = -\Lambda(i)\left(1-F_i(t)\right)$$

che è un'equazione differenziale del tipo $\dot{x}(t) = -\lambda x(t)$ che ha soluzione $x(t) = c\,e^{-\lambda t}$, con c da determinarsi in base alla condizione iniziale $x(0)$.

Nel nostro caso risulta:

$$1-F_i(t) = c\,e^{-\Lambda(i)t} \quad \Rightarrow \quad F_i(t) = 1 - c\,e^{-\Lambda(i)t}$$

Imponendo $F_i(0)=0$, otteniamo $c=1$, e quindi:

$$\boxed{F_i(t) = P\left(V(i) \leq t\right) = 1 - e^{-\Lambda(i)t}, \quad t \geq 0}$$

Abbiamo dimostrato che:

il tempo di soggiorno in un generico stato i della catena segue una distribuzione di probabilità esponenziale con tasso

$$\boxed{\Lambda(i) = -q_{i,i} = \sum_{j \neq i} q_{i,j}}$$

OSSERVAZIONI:

- $-q_{i,i}$ è il tasso della distribuzione esponenziale del tempo di soggiorno nello stato i $\Rightarrow$ descrive la propensione della catena ad abbandonare lo stato i

- dalla relazione $-q_{i,i} = \sum_{j \neq i} q_{i,j}$ e dal fatto che $q_{i,j} \geq 0 \ \forall j \neq i$, interpretiamo $q_{i,j}$ come la propensione della catena ad abbandonare lo stato i verso lo stato j.

Probabilità degli stati

Definiamo

$$\pi_j(t) = P(X(t) = j)$$

la probabilità che la catena si trovi nello stato j all'istante t.

Indichiamo con $\pi(t)$ il vettore riga delle probabilità degli stati all'istante t:

$$\pi(t) = [\pi_0(t) \ \pi_1(t) \ \pi_2(t) \ \dots]$$

Come calcolare $\pi_j(t)$?

$$\pi_j(t) = P(X(t)=j) = \sum_{i \in \mathcal{X}} P(X(t)=j \mid X(0)=i)\, P(X(0)=i)$$

regola della probabilità totale

$$= \sum_{i \in \mathcal{X}} p_{i,j}(t)\, \pi_i(0)$$

Dunque:

$$\pi_j(t) = \sum_{i \in \mathcal{X}} \pi_i(0)\, p_{i,j}(t)$$

$\rightsquigarrow$ prodotto di $\pi(0)$ per la j-esima colonna di $H(t)$

$\Rightarrow$ in forma matriciale:

$$\pi(t) = \pi(0) H(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\pi(t) = \pi(0) e^{Qt}}$$

ricordando che $H(t) = e^{Qt}$

L'equazione che abbiamo appena scritto permette di calcolare le probabilità degli stati a un generico istante t, note:

- la matrice dei tassi di transizione, Q
- il vettore delle probabilità degli stati all'istante iniziale, $\pi(0)$.

OSSERVAZIONE:

Ricordando che:

$$\frac{dH(t)}{dt} = H(t)Q$$

e derivando ambo i membri di

$$\pi(t) = \pi(0)H(t)$$

otteniamo:

$$\frac{d\pi(t)}{dt} = \pi(0)\frac{dH(t)}{dt} = \pi(0)H(t)Q = \pi(t)Q$$

Cioè, $\pi(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale lineare stazionaria

$$\frac{d\pi(t)}{dt} = \pi(t)Q$$

con condizione iniziale $\pi(0)$.

Ricapitolando, una catena di Markov omogenea a tempo continuo è completamente definita da una terna $(\mathcal{X}, \pi(0), Q)$ dove:

- $\mathcal{X}$ è lo spazio di stato (discreto) della catena
- $\pi(0)$ è il vettore (riga) delle probabilità degli stati all'istante iniziale
- Q è la matrice dei tassi di transizione.

CLASSIFICAZIONE DEGLI STATI

Valgono definizioni e risultati analoghi a quelli enunciati per catene di Markov omogenee a tempo discreto riguardo:

- raggiungibilità tra stati
- sottoinsiemi chiusi
- sottoinsiemi e catene irriducibili
- stati transitori, ricorrenti nulli e ricorrenti positivi.

ANALISI A REGIME

> ATTENZIONE! In generale, una catena di Markov omogenea a tempo continuo NON È un processo stocastico stazionario, né in senso forte, né in senso debole. Infatti, la densità di probabilità discreta degli stati evolve nel tempo in base alla legge
> $$\pi(t) = \pi(0)\, e^{Qt}$$

Dato uno stato i di una catena di Markov a tempo continuo omogenea consideriamo il limite

$$\pi_i = \lim_{t \to \infty} \pi_i(t) \qquad \text{dove } \pi_i(t) = P(X(t)=i)$$

Se π_i esiste, si dice probabilità stazionaria (o a regime) dello stato i.

Se π_i esiste per ogni $i \in \mathcal{X}$, il vettore

$$\pi = [\pi_0 \ \pi_1 \ \pi_2 \ \dots]$$

si dice vettore delle probabilità stazionarie degli stati.

ATTENZIONE! Le probabilità raggiungono un valore stazionario (cioè non dipendente dal tempo), NON lo stato, che continua a cambiare in maniera stocastica.

Ci poniamo le seguenti domande:

i) esistenza

Sotto quali condizioni il limite esiste?

ii) indipendenza da $\pi(0)$

Se il limite esiste, sotto quali condizioni esso è indipendente da $\pi(0)$?
(Si ricordi che $\pi(t)=\pi(0)e^{Qt}$, quindi in generale $\lim_{t\to\infty}\pi(t)$ potrebbe dipendere da $\pi(0)$...)

iii) consistenza

Se il limite esiste, sotto quali condizioni il vettore π definisce una densità di probabilità discreta degli stati della catena?

cioè, $\sum_{i\in\mathcal{X}}\pi_i=1$ (si osservi che $0\le\pi_i\le 1$ sicuramente, in quanto $0\le\pi_i(t)\le 1$ per ogni t)

L'analisi a regime per catene di Markov omogenee a tempo continuo è molto simile a quella svolta nel caso a tempo discreto. Enunciamo solo il risultato fondamentale:

TEOREMA - In una catena di Markov irriducibile in cui tutti gli stati sono ricorrenti positivi, esiste un unico vettore delle probabilità stazionarie dello stato, $\pi = [\pi_0\ \pi_1\ \pi_2\ \dots]$. Esso è tale che $\pi_i>0$ e $\pi_i=\lim_{t\to\infty}\pi_i(t)$ per ogni $i\in\mathcal{X}$, indipendentemente dal vettore delle probabilità dello stato all'istante iniziale, $\pi(0)$. Il vettore π si può ottenere risolvendo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \pi Q = 0 \\ \sum_{i \in \mathcal{X}} \pi_i = 1 \end{cases}$$

<u>OSSERVAZIONE</u>: Ricordando che $\pi(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale:

$$\frac{d\pi(t)}{dt} = \pi(t)Q$$

e osservando che, se $\pi(t)$ tende al valore costante π, allora $\frac{d\pi(t)}{dt}$ tende a 0, si ottiene la prima relazione soddisfatta da π:

$$\pi Q = 0$$

Tale sistema ha però infinite soluzioni... (perché?)

Sotto le ipotesi del teorema, il vincolo $\sum_{i \in \mathcal{X}} \pi_i = 1$ permette di selezionare l'<u>unica</u> soluzione che rappresenta una densità di probabilità discreta.

<u>IMPORTANTE</u>: Analogamente al caso a tempo discreto, è possibile mostrare che ogni catena di Markov omogenea a tempo continuo che sia <u>irriducibile</u> e <u>finita</u>, ammette un <u>unico</u> vettore delle probabilità stazionarie dello stato.