

Consideriamo il tempo di soggiorno in uno stato della catena:

$V(i)$ = tempo di soggiorno nello stato $i \in X$

$V(i)$ è una variabile aleatoria continua che può assumere valori in $(0, +\infty)$.

Consideriamo la distribuzione di probabilità di $V(i)$:

$$F_i(t) = P(V(i) \leq t), \quad t \geq 0$$

Da cui, scegliendo $\delta t \geq 0$:

$$\begin{aligned} F_i(t + \delta t) - F_i(t) &= P(t < V(i) \leq t + \delta t) \\ &= P(V(i) \leq t + \delta t | V(i) > t) P(V(i) > t) \\ &= P(V(i) \leq t + \delta t | V(i) > t) (1 - F_i(t)) \end{aligned}$$

Supponiamo δt sufficientemente piccolo cosicché nell'intervallo $(t, t + \delta t]$ possa avvenire al più una sola transizione di stato. Ricordiamo che:

$$p_{i,j}(\delta t) = q_{i,j} \delta t + o(\delta t) \quad \text{per } j \neq i.$$

Da cui:

$$\begin{aligned} P(V(i) \leq t + \delta t | V(i) > t) &= P(\text{una transizione di stato in } (t, t + \delta t] | X(t) = i) \\ &= \sum_{j \neq i} p_{i,j}(\delta t) = \sum_{j \neq i} q_{i,j} \delta t + o(\delta t) = \Lambda(i) \delta t + o(\delta t) \end{aligned}$$

$$\text{avendo posto: } \Lambda(i) = \sum_{j \neq i} q_{i,j} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{proprietà di } Q}}{=} -q_{i,i}$$

Dunque:

$$\frac{F_i(t + \delta t) - F_i(t)}{\delta t} = (\Lambda(i) + o(1)) (1 - F_i(t))$$

Prendendo il limite per $\delta t \rightarrow 0$:

2

$$\frac{dF_i(t)}{dt} = \lambda(i) (1 - F_i(t))$$

↓ equazione differenziale lineare stazionaria da risolversi
con condizione iniziale $F_i(0) = P(V(i) \leq 0) = 0$ perché $V(i) > 0$.

Possiamo riscrivere l'equazione precedente nella forma:

$$\frac{d(1 - F_i(t))}{dt} = -\lambda(i) (1 - F_i(t))$$

che è un'equazione differenziale del tipo $\dot{x}(t) = -\lambda x(t)$ che ha soluzione $x(t) = c e^{-\lambda t}$, con c da determinarsi in base alla condizione iniziale $x(0)$.

Nel nostro caso risulta:

$$1 - F_i(t) = c e^{-\lambda(i)t} \Rightarrow F_i(t) = 1 - c e^{-\lambda(i)t}$$

Imponendo $F_i(0) = 0$, otteniamo $c = 1$, e quindi:

$$F_i(t) = P(V(i) \leq t) = 1 - e^{-\lambda(i)t}, \quad t \geq 0$$

Abbiamo dimostrato che:

il tempo di soggiorno in un generico stato i della catena segue una distribuzione di probabilità esponenziale con tasso

$$\lambda(i) = -q_{i,i} = \sum_{j \neq i} q_{i,j}$$

OSSERVAZIONI:

- $-q_{i,i}$ è il tasso della distribuzione esponenziale del tempo di soggiorno nello stato $i \Rightarrow$ descrive la propensione della catena ad abbandonare lo stato i

(3)

- dalla relazione $-q_{i,i} = \sum_{j \neq i} q_{i,j}$ e dal fatto che $q_{i,j} \geq 0 \forall j \neq i$, interpretiamo $q_{i,j}$ come la propensione della catena ad abbandonare lo stato i verso lo stato j .



Probabilità degli stati

Definiamo

$$\pi_j(t) = P(X(t) = j)$$

la probabilità che la catena si trovi nello stato j all'istante t .

Indichiamo con $\pi(t)$ il vettore riga delle probabilità degli stati all'istante t :

$$\pi(t) = [\pi_0(t) \pi_1(t) \pi_2(t) \dots]$$

Come calcolare $\pi_j(t)$?

$$\begin{aligned} \pi_j(t) = P(X(t) = j) &= \sum_{i \in X} P(X(t) = j | X(0) = i) P(X(0) = i) \\ &\quad \swarrow \text{regola della} \\ &\quad \text{probabilità totale} \end{aligned} = \sum_{i \in X} p_{i,j}(t) \pi_i(0)$$

Dunque:

$$\pi_j(t) = \sum_{i \in X} \pi_i(0) p_{i,j}(t) \rightsquigarrow \text{prodotto di } \pi(0) \text{ per la } j\text{-esima colonna di } H(t)$$

$\Rightarrow$ in formametricale:

$$\pi(t) = \pi(0) H(t)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\pi(t) = \pi(0) e^{Qt}}$$

ricordando che
 $H(t) = e^{Qt}$

L'equazione che abbiamo appena scritto permette di calcolare le probabilità degli stati a un generico istante t , note:

- la matrice dei tassi di transizione, Q
- il vettore delle probabilità degli stati all'istante iniziale, $\pi(0)$.

OSSERVAZIONE:

Ricordando che:

$$\frac{dH(t)}{dt} = H(t)Q$$

e derivando ambo i membri di

$$\pi(t) = \pi(0)H(t)$$

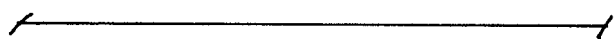
otteniamo:

$$\frac{d\pi(t)}{dt} = \pi(0) \frac{dH(t)}{dt} = \pi(0)H(t)Q = \pi(t)Q$$

Cioè, $\pi(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale lineare stazionaria

$$\frac{d\pi(t)}{dt} = \pi(t)Q$$

con condizione iniziale $\pi(0)$.



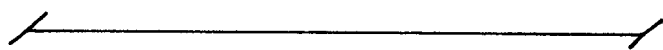
Ricapitolando, una catena di Markov omogenea a tempo continuo e completamente definita da una terna $(X, \pi(0), Q)$ dove:

- X è lo spazio di stato (discreto) della catena
- $\pi(0)$ è il vettore (riga) delle probabilità degli stati all'istante iniziale
- Q è la matrice dei tassi di transizione.

CLASSIFICAZIONE DEGLI STATI

Valgono definizioni e risultati analoghi a quelli enunciati per catene di Markov omogenee a tempo discreto riguardo:

- raggiungibilità tra stati
- sottoinsiemi chiusi
- sottoinsiemi e catene irriducibili
- stati transitori, ricorrenti nulli e ricorrenti positivi.



ANALISI A REGIME

ATTENZIONE! In generale, una catena di Markov omogenea a tempo continuo NON È un processo stocastico stazionario, ne in senso forte, ne in senso debole. Infatti, la densità di probabilità discreta degli stati evolve nel tempo in base alla legge

$$\pi(t) = \pi(0) e^{Qt}$$

Dato uno stato i di una catena di Markov a tempo continuo omogenea consideriamo il limite

$$\pi_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_i(t) \quad \text{dove } \pi_i(t) = P(X(t) = i)$$

Se π_i esiste, si dice probabilità stazionaria (o a regime) dello stato i .

Se π_i esiste per ogni $i \in X$, il vettore

$$\pi = [\pi_0 \pi_1 \pi_2 \dots]$$

si dice vettore delle probabilità stazionarie degli stati.

ATTENZIONE! Le probabilità raggiungono un valore stazionario (cioè non dipendente dal tempo), NON lo stato, che continua a cambiare in maniera stocastica.

6

Ci poniamo le seguenti domande:

i) esistenza

Sotto quali condizioni il limite esiste?

ii) indipendenza da $\pi(0)$

Se il limite esiste, sotto quali condizioni esso è indipendente da $\pi(0)$?

(Si ricordi che $\pi(t) = \pi(0)e^{Qt}$, quindi in generale $\lim_{t \rightarrow \infty} \pi(t)$ potrebbe dipendere da $\pi(0)$...)

iii) consistenza

Se il limite esiste, sotto quali condizioni il vettore π definisce una densità di probabilità discreta degli stati della catena?

↙
cioè, $\sum_{i \in X} \pi_i = 1$ (si osservi che $0 \leq \pi_i \leq 1$ sicuramente, in quanto $0 \leq \pi_i(t) \leq 1$ per ogni t)

L'analisi a regime per catene di Markov omogenee a tempo continuo è molto simile a quella svolta nel caso a tempo discreto. Enunciamo solo il risultato fondamentale:

TEOREMA - In una catena di Markov irriducibile in cui tutti gli stati

sono ricorrenti positivi, esiste un unico vettore delle probabilità stazionarie dello stato, $\pi = [\pi_0 \pi_1 \pi_2 \dots]$. Esso è tale che

$\pi_i > 0$ e $\pi_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_i(t)$ per ogni $i \in X$, indipendentemente dal vettore

delle probabilità dello stato all'istante iniziale, $\pi(0)$. Il vettore π si può ottenere risolvendo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \pi Q = 0 \\ \sum_{i \in X} \pi_i = 1 \end{cases}$$

OSSERVAZIONE: Ricordando che $\pi(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale:

$$\frac{d\pi(t)}{dt} = \pi(t)Q$$

e osservando che, se $\pi(t)$ tende al valore costante π , allora $\frac{d\pi(t)}{dt}$ tende a 0, si ottiene la prima relazione soddisfatta da π :

$$\pi Q = 0$$

Tale sistema ha però infinite soluzioni... (perché?)

Sotto le ipotesi del teorema, il vincolo $\sum_{i \in X} \pi_i = 1$ permette di selezionare l'unica soluzione che rappresenta una densità di probabilità discreta.

IMPORTANTE: Analogamente al caso a tempo discreto, è possibile mostrare che ogni catena di Markov omogenea a tempo continuo che sia irriducibile e finita, ammette un unico vettore delle probabilità stazionarie dello stato.