

Processi stocastici con:

- tempo continuo: $T = \mathbb{R}^+$
- stato discreto: $X \in \{0, 1, 2, \dots\} = \mathcal{X}$
- proprietà di Markov

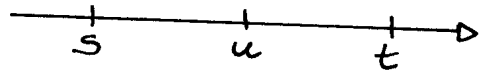
$$P(X(t_{h+1}) = x_{h+1} | X(t_h) = x_h, \dots, X(t_0) = x_0) = P(X(t_{h+1}) = x_{h+1} | X(t_h) = x_h)$$

$$\forall t_0 < t_1 < \dots < t_{h+1} \in T, \forall x_0, x_1, \dots, x_{h+1} \in \mathcal{X}, \forall h = 0, 1, 2, \dots$$

Definiamo la probabilità di transizione:

$$p_{i,j}(s,t) = P(X(t) = j | X(s) = i) \quad \forall s \leq t, \forall i, j \in \mathcal{X}$$

Fissato $u \in [s, t]$,



consideriamo la partizione dell'evento certo: $\{X(u) = r : r \in \mathcal{X}\}$

Applicando la regola della probabilità totale e la proprietà di Markov otteniamo:

$$\begin{aligned} p_{i,j}(s,t) &= P(X(t) = j | X(s) = i) \\ &= \sum_{r \in \mathcal{X}} P(X(t) = j | X(u) = r, X(s) = i) P(X(u) = r | X(s) = i) \\ &= \sum_{r \in \mathcal{X}} P(X(t) = j | X(u) = r) P(X(u) = r | X(s) = i) \\ &= \sum_{r \in \mathcal{X}} p_{r,j}(u,t) p_{i,r}(s,u) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p_{i,j}(s,t) = \sum_{r \in \mathcal{X}} p_{i,r}(s,u) p_{r,j}(u,t), \quad \forall s \leq u \leq t$$

- equazione di Chapman-Kolmogorov a tempo continuo -

Conviene riscrivere l'equazione di Chapman-Kolmogorov in forma matriciale. A tal fine, si definisce:

$$H(s,t) = \left[p_{i,j}(s,t) \right]_{\substack{i \in X \\ j \in X}} \\ = \begin{bmatrix} p_{0,0}(s,t) & p_{0,1}(s,t) & p_{0,2}(s,t) & \dots \\ p_{1,0}(s,t) & p_{1,1}(s,t) & \dots & \\ p_{2,0}(s,t) & \dots & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

NOTA: Si osservi che $H(s,s) = I$ (matrice identità).

Infatti, $p_{i,i}(s,s) = P(X(s)=i | X(s)=i) = 1$,

mentre $p_{i,j}(s,s) = P(X(s)=j | X(s)=i) = 0 \quad \forall j \neq i$;

assumendo che non possano accadere più transizioni di stato in un singolo istante di tempo.

NOTA: Si osservi che la somma lungo qualsiasi riga di $H(s,t)$ fa 1. Infatti:

$$\sum_{j \in X} p_{i,j}(s,t) = \sum_{j \in X} P(X(t)=j | X(s)=i) = P(X(t) \in X | X(s)=i) = 1$$

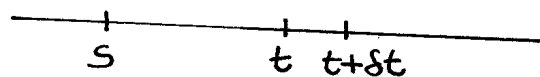
$\downarrow$
evento certo

Osservando, dall'equazione di Chapman-Kolmogorov precedentemente scritta, che il generico elemento $p_{i,j}(s,t)$ di $H(s,t)$ si ottiene come prodotto della i -esima riga di $H(s,u)$ per la j -esima colonna di $H(u,t)$, risulta:

$H(s,t) = H(s,u) H(u,t) \quad \forall s \leq u \leq t$

- forma matriciale dell'equazione di Chapman-Kolmogorov a tempo continuo -

Considerando ora $s \leq t \leq t + \delta t$,
risulta:



3

$$H(s, t + \delta t) = H(s, t) H(t, t + \delta t)$$

Sottraendo $H(s, t)$ ad ambo i membri:

$$H(s, t + \delta t) - H(s, t) = H(s, t) [H(t, t + \delta t) - I]$$

e dividendo per δt :

$$\frac{H(s, t + \delta t) - H(s, t)}{\delta t} = H(s, t) \frac{H(t, t + \delta t) - I}{\delta t}$$

Facendo tendere $\delta t \rightarrow 0$, a sinistra abbiamo:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{H(s, t + \delta t) - H(s, t)}{\delta t} = \frac{\partial H(s, t)}{\partial t}$$

supponendo che il limite esista, mentre a destra, sempre supponendo che il limite esista, definiamo:

$$Q(t) \triangleq \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{H(t, t + \delta t) - I}{\delta t}$$

Chiamiamo $Q(t)$ la matrice dei tassi di transizione all'istante t .

Questa terminologia sarà più chiara in seguito...

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial H(s, t)}{\partial t} = H(s, t) Q(t), \quad s \leq t}$$

- equazione di Chapman-Kolmogorov in avanti -

fa riferimento al fatto che l'equazione può essere
risolta (nota $Q(t)$) integrandola in avanti nel tempo
con condizione iniziale $H(s, s) = I$.

Similmente, scegliendo $s \leq s + \delta s \leq t$, si ottiene

4

$$\boxed{\frac{\partial H(s,t)}{\partial s} = -Q(s)H(s,t), \quad s \leq t}$$

- equazione di Chapman-Kolmogorov all'indietro -

↓ si risolve per integrazione
all'indietro nel tempo con condizione
finale $H(t,t) = I$.

CATENE DI MARKOV OMOGENEE A TEMPO CONTINUO

Definizione: Una catena di Markov a tempo continuo si dice omogenea se le probabilità di transizione $p_{i,j}(s,t)$ dipendono solo dalla differenza temporale $t-s$ per ogni $s \leq t$, e per ogni coppia $i, j \in X$.

In questo caso, posto $t = s + \tau$, con $\tau \geq 0$, scriviamo:

$$p_{i,j}(\tau) = P(X(s+\tau) = j | X(s) = i) \quad \underline{\text{indipendente da } s}$$

Di conseguenza si scrive anche:

$$H(\tau) = \left[p_{i,j}(\tau) \right]_{\substack{i \in X \\ j \in X}}$$

Risulta che:

$$Q(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{H(t, t + \delta t) - I}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{H(\delta t) - I}{\delta t} \quad \underline{\text{indipendente da } t},$$

e quindi COSTANTE
(supposto che il limite esista)

$$\text{Poniamo: } Q = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{H(\delta t) - I}{\delta t}.$$

NOTA -

5

catene di Markov omogenee

tempo discreto

P: matrice delle probabilità
di transizione in un passo
costante

tempo continuo

Q: matrice dei tassi di
transizione costante.

Riprendiamo l'equazione di Chapman-Kolmogorov in avanti:

$$\frac{\partial H(s,t)}{\partial t} = H(s,t)Q(t), \quad s \leq t$$

con condizione iniziale $H(s,s) = I$.

Nel caso di catene omogenee, essa si riscrive come:

$$\frac{\partial H(t-s)}{\partial t} = H(t-s)Q, \quad s \leq t$$

Operando il cambio di variabile $\tau = t-s$, risulta $\partial \tau = \partial t$, per cui otteniamo:

$$\boxed{\frac{dH(\tau)}{d\tau} = H(\tau)Q}$$

che è un'equazione differenziale lineare stazionaria da risolversi con condizione iniziale $H(0) = I$. È noto (vedi FONDAMENTI DI AUTOMATICA) che risulta:

$$\boxed{H(\tau) = e^{Q\tau}}$$

dove $e^{Q\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Q\tau)^n}{n!}$ è l'esponenziale di matrice.

Supponiamo di voler calcolare

$$P_{i,j}(\tau) = P(X(t+\tau)=j | X(t)=i)$$

Conviene allora calcolare $H(\tau) = e^{Q\tau}$, e prenderne l'elemento di posto (i,j) .

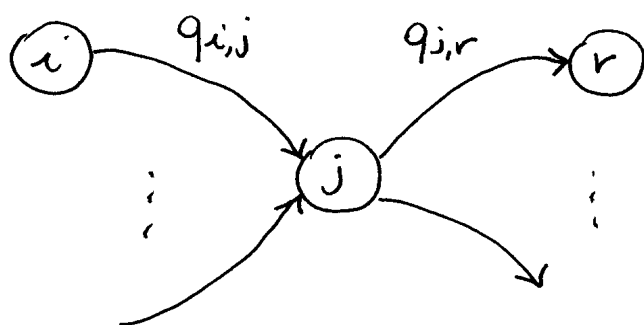
Per calcolare $H(\tau) = e^{Q\tau}$ si può per esempio utilizzare il metodo della trasformata di Laplace:

$$\mathcal{L}[e^{Q\tau}] = (sI - Q)^{-1} + \text{scomposizione in fratti semplici} + \text{antitrasformata.}$$

Rappresentazione grafica

Una catena di Markov omogenea a tempo continuo può essere rappresentata con un grafo di transizioni in cui:

- i nodi sono gli stati della catena
- si mette un arco orientato dal nodo i al nodo $j \neq i$ se e solo se $q_{i,j} \neq 0$; $q_{i,j}$ è l'etichetta di tale arco.
- non si mettono archi da un nodo i verso se stesso ("ricciolini")



NOTA- Si considera Q scritta nella forma:

$$Q = [q_{i,j}]_{\substack{i \in X \\ j \in X}} = \begin{bmatrix} q_{0,0} & q_{0,1} & q_{0,2} & \dots \\ q_{1,0} & q_{1,1} & \dots \\ q_{2,0} & \dots \\ \vdots & \end{bmatrix}$$

PROPRIETÀ DELLA MATRICE Q DEI TASSI DI TRANSIZIONE

7

OSSERVAZIONE #1

Ricordiamo che

$$H(\tau) = [p_{i,j}(\tau)]_{\substack{i \in X \\ j \in X}}$$

$$e \quad H(\tau) = e^{Q\tau} = I + Q\tau + \frac{(Q\tau)^2}{2} + \dots$$

Quindi per $\delta t \rightarrow 0$ possiamo scrivere:

$$H(\delta t) = I + Q\delta t + o(\delta t)$$

Per $i \neq j$ (siamo fuori dalla diagonale principale):

$$p_{i,j}(\delta t) = q_{i,j} \delta t + o(\delta t)$$

Dato che $p_{i,j}(\delta t) \geq 0$ (è una probabilità), questo implica (sebbene la deduzione dovrebbe essere resa rigorosa...) che:

$q_{i,j} \geq 0 \quad \text{se } i \neq j$

OSSERVAZIONE #2

Definiamo $\mathbf{1}$ = vettore colonna formato da tutti 1.

Sappiamo che $H(\tau) \mathbf{1} = \mathbf{1}$ per ogni $\tau \geq 0$.

Dall'equazione:

$$\frac{dH(\tau)}{d\tau} = H(\tau)Q$$

risulta:

$$0 = \frac{d(H(\tau) \mathbf{1})}{d\tau} = H(\tau)Q \mathbf{1}$$

$$\Rightarrow H(\tau)Q \mathbf{1} = 0 \quad \text{per ogni } \tau \geq 0.$$

In particolare, per $t=0$, $H(0) = I$, e quindi:

8

$$Q \mathbf{1} = 0$$

cioè la somma lungo qualsiasi riga di Q fa 0. In altri termini, per ogni $i \in X$:

$$q_{i,i} = - \sum_{j \neq i} q_{i,j}$$

e dato che si è mostrato $q_{i,j} \geq 0$ per ogni $j \neq i$, risulta:

$$q_{i,i} \leq 0$$

Concludiamo che, per una catena di Markov omogenea a tempo continuo, la matrice Q dei tassi di transizione è tale che:

- i) tutti gli elementi lungo la diagonale principale sono non positivi;
- ii) tutti gli altri elementi sono non negativi
- iii) la somma lungo una qualsiasi riga di Q fa 0.
- iv) Se Q ha dimensioni finite, allora $\lambda=0$ è autovalore di Q (infatti si è mostrato sopra che $Q \mathbf{1} = 0$, cioè $\mathbf{1}$ è autovettore di Q relativo all'autovalore $\lambda=0$).