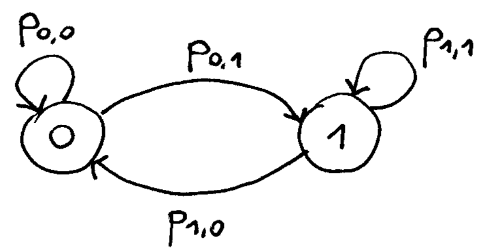
Esercizio 1

tempo: t = numero di slot trascorsi $\in \{0,1,2,\dots\}$

stato: $X = \begin{cases} 0 & \text{se la sorgente è OFF} \\ 1 & \text{se la sorgente è ON} \end{cases}$

matrice delle probabilità di transizione a un passo:

$$P = \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} \\ p_{1,0} & p_{1,1} \end{bmatrix}$$



dove $p_{i,j} = P(X(t+1)=j \mid X(t)=i)$.

Dobbiamo determinare i valori $p_{i,j}$.

- $V(1)$ è il tempo di soggiorno nello stato 1.

  Sappiamo che $V(1)$ segue la distribuzione geometrica:

  $$P(V(1)=n) = p_{1,1}^{n-1}(1-p_{1,1}) \qquad n=1,2,3,\dots$$

  Sfruttando il suggerimento, abbiamo che

  $$E[V(1)] = \frac{1}{1-p_{1,1}} \qquad (\text{valore atteso di } V(1))$$

  D'altra parte, è un dato del problema che

  $$E[V(1)] = 10.$$

  Ugualiando le due quantità abbiamo:

  $$\frac{1}{1-p_{1,1}} = 10 \implies 1-p_{1,1} = \frac{1}{10} \implies p_{1,1} = \frac{9}{10}$$

  Sfruttando il fatto che la somma lungo le righe di P fa 1, otteniamo:

  $$p_{0,1} = 1-p_{1,1} = \frac{1}{10}.$$

- Scriviamo P nel seguente modo:

$$P = \begin{bmatrix} 1-q & q \\ 1/10 & 9/10 \end{bmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ imponiamo già che la somma sulla 1^a riga faccia 1, in modo tale da determinare un solo parametro, cioè q.

$\rightsquigarrow$ calcolati

È un dato del problema che il vettore delle probabilità stazionarie degli stati è:

$$\pi = [\pi_0 \ \ \pi_1] = \left[\tfrac{3}{4} \ \ \tfrac{1}{4}\right].$$

Dato che la catena è irriducibile, finita e aperiodica, π è l'unica soluzione del sistema:

$$\begin{cases} \pi = \pi P \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{cases}$$

$$\pi = \pi P \Rightarrow \left[\tfrac{3}{4} \ \ \tfrac{1}{4}\right] = \left[\tfrac{3}{4} \ \ \tfrac{1}{4}\right] \begin{bmatrix} 1-q & q \\ 1/10 & 9/10 \end{bmatrix} = \left[\tfrac{31}{40} - \tfrac{3}{4}q \ \ \ \tfrac{3}{4}q + \tfrac{9}{40}\right]$$

$\Rightarrow$ due equazioni nella sola incognita q:

$$\begin{cases} \frac{31}{40} - \frac{3}{4}q = \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4}q + \frac{9}{40} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}q - \frac{1}{40} = 0 \\ \frac{3}{4}q - \frac{1}{40} = 0 \end{cases}$$

identiche! la soluzione esiste...

$$\frac{3}{4}q - \frac{1}{40} = 0 \Rightarrow q = \frac{1}{30}$$

Dunque:

$$p_{0,0} = 1-q = \frac{29}{30}$$

$$p_{0,1} = q = \frac{1}{30}$$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} \frac{29}{30} & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{10} & \frac{9}{10} \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2

tempo: $t \in \{0, 1, 2, \dots\}$

t incrementa di 1 ogni qualvolta una molecola passa dall'ambiente A all'ambiente B, o viceversa.

stato: $x = \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \end{bmatrix}$ $x_A \rightarrow$ numero di molecole nell'ambiente A; $x_B \rightarrow$ numero di molecole nell'ambiente B

è una definizione corretta, ma ridondante, perché x_A e x_B sono legate dal vincolo $x_A + x_B = 4$.

Dunque possiamo considerare:

$$x = x_A \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

matrice delle probabilità di transizione a un passo:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

spiegazione:

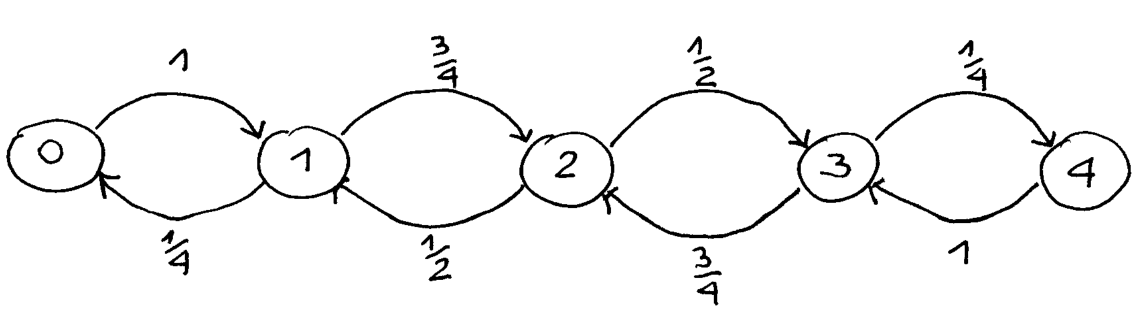
lo stato corrente è $X(t) = 1$.
All'istante $t+1$ può essere soltanto $X(t+1) = 0$ oppure $X(t+1) = 2$, perché t incrementa di 1 al passaggio di una singola molecola nel condotto. Risulta

$$P(X(t+1) = 2 \mid X(t) = 1) = \frac{3}{4}$$

perché 3 molecole su 4 possono spostarsi dall'ambiente B all'ambiente A, incrementando di 1 il numero di molecole nell'ambiente A. Similmente,

$$P(X(t+1) = 0 \mid X(t) = 1) = \frac{1}{4}.$$

grafo di transizione



Il numero medio a <u>regime</u> di molecole nell'ambiente A, se esiste, e' dato dalla formula:

$$E[X] = \sum_{i=0}^{4} i \cdot \pi_i$$

dove $\pi = [\pi_0\ \pi_1\ \pi_2\ \pi_3\ \pi_4]$ e' il vettore delle probabilita' stazionarie degli stati. Dunque l'esistenza di $E[X]$ si riconduce all'esistenza di π.

Tale vettore non e' calcolabile risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \pi = \pi P \\ \sum_{i=0}^{4} \pi_i = 1 \end{cases}$$

Infatti la catena, sebbene irriducibile e finita, risulta <u>periodica</u>.

Per esempio, considerando lo stato 0:

$$\Delta(0) = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$$

e d_0 = massimo comun divisore di $\Delta(0) = 2$ $\Rightarrow$ lo stato 0 e' periodico.

La presenza di stati periodici in una catena di Markov irriducibile comporta l'esistenza di <u>soluzioni oscillanti</u>.

In effetti, si puo' vedere che, per $t \to \infty$, P^t <u>oscilla</u> tra due valori:

$$P^t = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 3/4 & 0 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/8 & 0 & 3/4 & 0 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/8 & 0 & 3/4 & 0 & 1/8 \end{bmatrix} & \text{se } t \text{ e' pari} \\ \\ \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/8 & 0 & 3/4 & 0 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/8 & 0 & 3/4 & 0 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} & \text{se } t \text{ e' dispari} \end{cases}$$

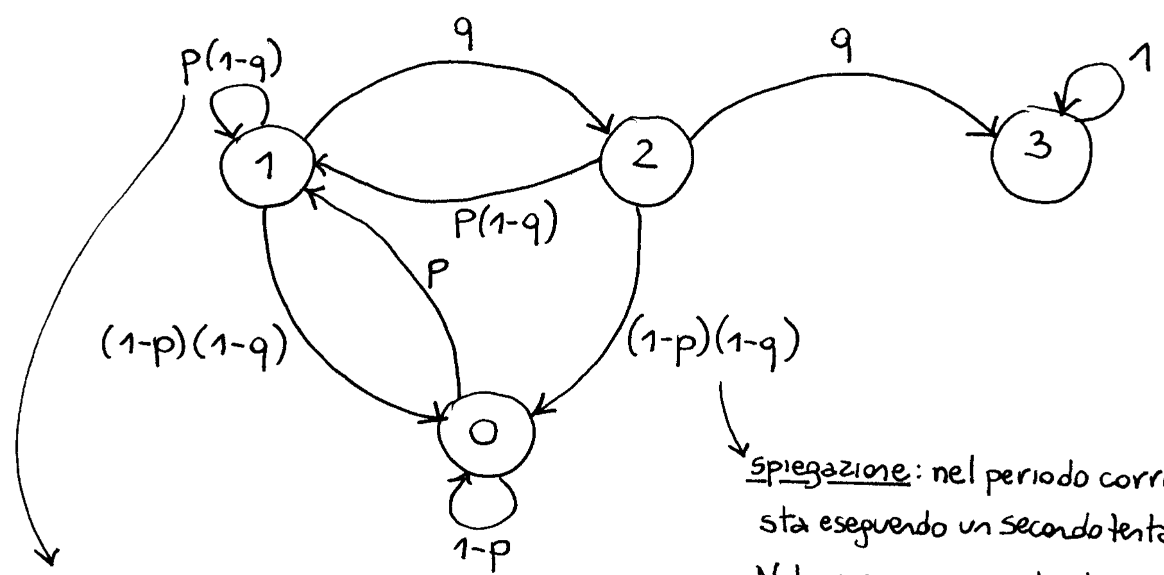
quindi $\pi = \lim_{t\to\infty} \pi(t) = \lim_{t\to\infty} \pi(0) P^t$ in generale <u>non esiste</u>.

Esercizio 3

tempo: t = numero di periodi trascorsi $\in \{0, 1, 2, \dots\}$

$$
\text{stato: } X = \begin{cases} 0 & \text{se il robot master è inattivo} \\ 1 & \text{se il robot master esegue un primo tentativo} \\ 2 & \text{se il robot master esegue un secondo tentativo} \\ 3 & \text{se il robot master è fermo per manutenzione} \end{cases}
$$

grafo di transizione:



spiegazione: nel periodo corrente il robot master sta eseguendo un primo tentativo (stato 1).
Nel prossimo periodo il robot master sarà eseguendo un primo tentativo (stato 1) se nel periodo corrente accade che:

i) il robot master porta a termine con successo il tentativo (probabilità 1-q)

ii) un nuovo pezzo viene depositato sul nastro trasportatore (probabilità p).

NOTA - ovviamente, nel prossimo periodo il primo tentativo riguarderà il nuovo pezzo...

spiegazione: nel periodo corrente il robot master sta eseguendo un secondo tentativo (stato 2).
Nel prossimo periodo il robot master sarà inattivo (stato 0) se nel periodo corrente accade che:

i) il robot master porta a termine con successo il tentativo (probabilità 1-q)

ii) nessun nuovo pezzo viene depositato sul nastro trasportatore (probabilità 1-p).

matrice delle probabilità di transizione a un passo:

$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & 0 \\ (1-p)(1-q) & p(1-q) & q & 0 \\ (1-p)(1-q) & p(1-q) & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La catena non è irriducibile, infatti esiste uno stato assorbente (stato 3). Ciononostante, in questo caso la distribuzione stazionaria degli stati esiste comunque. Infatti, la catena è formata da una componente irriducibile e finita (stati 0, 1 e 2) e da una componente assorbente (stato 3) alla quale si può arrivare con probabilità non nulla dallo stato 2. Dunque, nel lungo periodo, la catena arriverà sempre nello stato 3, che a quel punto (essendo lo stato 3 assorbente) la catena non abbandonerà più. Questa analisi implica che il vettore delle probabilità stazionarie degli stati esiste, è indipendente dalla condizione iniziale, ed ha la forma:

$$\Pi = [0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1].$$

Dobbiamo infine calcolare:

$$P(V(1) \geq 3)$$

dove $V(1)$ è il tempo di soggiorno nello stato 1 (robot operativo in condizione di corretto funzionamento). Sappiamo che $V(1)$ segue la distribuzione geometrica:

$$P(V(1)=n) = p_{1,1}^{n-1}(1-p_{1,1}) \qquad n=1,2,3,\ldots$$

Dunque:

$$P(V(1) \geq 3) = \sum_{n=3}^{\infty} P(V(1)=n) = 1 - P(V(1)=1) - P(V(1)=2)$$

$$= 1 - (1-p_{1,1}) - p_{1,1}(1-p_{1,1}) = p_{1,1}^2 = P(X(t+2)=1, X(t+1)=1 \mid X(t)=1)$$

altro metodo...