RISULTATI SUGLI STATI RICORRENTI POSITIVI/NULLI

i) Se i è uno stato ricorrente positivo, e j è uno stato raggiungibile da i, allora anche j è ricorrente positivo.

ii) Se S è un sottoinsieme chiuso e irriducibile, allora ogni stato in S è ricorrente positivo, oppure ogni stato in S è ricorrente nullo, oppure ogni stato in S è transitorio

OSSERVAZIONE: In una catena irriducibile, basta studiare la caratteristica di ricorrenza di un solo stato.

iii) Se S è un sottoinsieme chiuso, irriducibile e finito, allora ogni stato in S è ricorrente positivo.

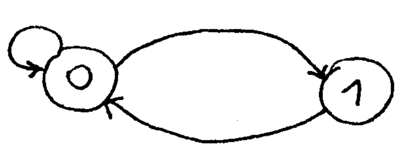
OSSERVAZIONE: In una catena irriducibile e finita, ogni stato è ricorrente positivo.

Stati periodici

Consideriamo uno stato $i \in \mathcal{X}$, e definiamo l'insieme:

$$\Delta(i) = \{ n > 0 : p_{i,i}(n) > 0 \}$$

Esempio



$$\Delta(0) = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\Delta(1) = \{2, 3, 4, \dots\}$$

Definiamo d_i il massimo comun divisore dell'insieme $\Delta(i)$.

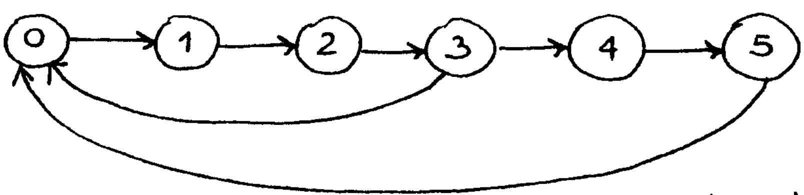
Definizione - Uno stato i si dice periodico se $d_i \geq 2$; altrimenti, si dice aperiodico.

Nell'esempio precedente, entrambi gli stati sono aperiodici perché $d_0 = d_1 = 1$.

<u>OSSERVAZIONE</u>: Uno stato i è certamente aperiodico se $p_{i,i} > 0$.

La quantità d_i viene chiamata "<u>periodo</u>" dello stato i, anche se non rappresenta propriamente un periodo per le occorrenze dello stato i, come risulta dal seguente

<u>Esempio</u>:



$\Delta(0) = \{4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$

$\Rightarrow d_0 = 2$

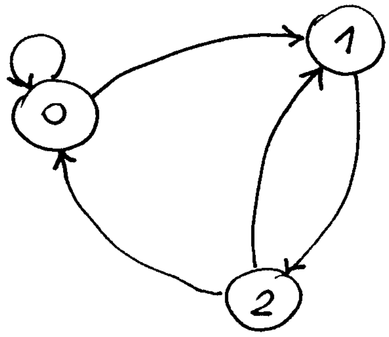
Lo stato 0 è <u>periodico</u>, ma non è vero che lo stato ritorna in 0 ogni 2 istanti di tempo.

Vale il seguente importante risultato:

<u>TEOREMA</u> - In una catena di Markov omogenea a tempo discreto irriducibile tutti gli stati hanno lo stesso periodo.

<u>conseguenza</u>: In una catena di Markov omogenea a tempo discreto irriducibile è sufficiente determinare il periodo di un singolo stato.

<u>esempio</u>:



- catena irriducibile
- lo stato 0 è aperiodico (infatti, $p_{0,0} > 0$).

$\Rightarrow$ tutti gli stati della catena sono aperiodici.

ANALISI A REGIME

> **ATTENZIONE!** In generale, una catena di Markov omogenea a tempo discreto NON È un processo stocastico stazionario, né in senso forte, né in senso debole. Infatti, la densità di probabilità discreta degli stati evolve nel tempo in base alla legge
>
> $$\pi(t) = \pi(0) P^t$$

Dato uno stato i di una catena di Markov a tempo discreto omogenea consideriamo il limite

$$\pi_i := \lim_{t\to\infty} \pi_i(t) \qquad \text{dove } \pi_i(t) = P(X(t)=i)$$

Se π_i esiste, si dice probabilità stazionaria (o a regime) dello stato i.

Se π_i esiste per ogni $i \in \mathcal{X}$, il vettore

$$\pi = [\pi_0 \; \pi_1 \; \pi_2 \; \dots]$$

si dice vettore delle probabilità stazionarie degli stati.

ATTENZIONE! Le probabilità raggiungono un valore stazionario (cioè non dipendente dal tempo), NON lo stato, che continua a cambiare in maniera stocastica.

Ci poniamo le seguenti domande:

i) esistenza

Sotto quali condizioni il limite esiste?

ii) indipendenza da $\pi(0)$

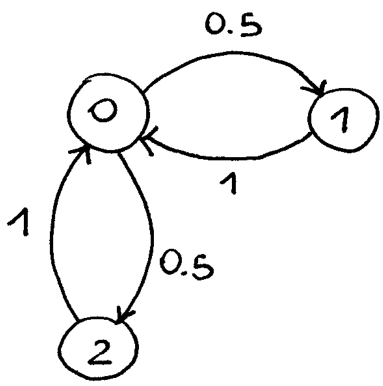
Se il limite esiste, sotto quali condizioni esso è indipendente da $\pi(0)$?
(Si ricordi che $\pi(t) = \pi(0) P^t$, quindi in generale $\lim_{t\to\infty} \pi(t)$ potrebbe dipendere da $\pi(0)$...)

iii) <u>consistenza</u>

Se il limite esiste, sotto quali condizioni il vettore π definisce una densità di probabilità discreta degli stati della catena?

cioè, $\sum_{i \in \mathcal{X}} \pi_i = 1$ (si osservi che $0 \le \pi_i \le 1$ sicuramente, in quanto $0 \le \pi_i(t) \le 1$ per ogni t)

ESEMPIO #1



$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ricordando che $\pi(t) = \pi(0) P^t$, calcoliamo le prime potenze di P:

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad P^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P \,!$$

Da cui:

$$P^4 = P^3 \cdot P = P \cdot P = P^2$$

$$P^5 = P^3 \cdot P^2 = P \cdot P^2 = P^3 = P, \quad \text{ecc.}$$

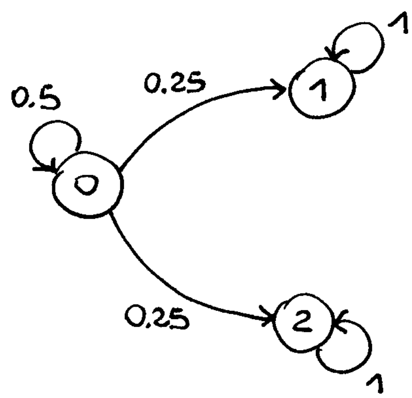
$\Rightarrow$ P^t oscilla tra due valori: P^2 per t pari, P per t dispari

Dunque: $\lim_{t \to \infty} \pi(t) = \lim_{t \to \infty} \pi(0) P^t$ <u>non esiste</u> in generale.

Osservare che $\Delta(0) = \{2, 4, 6, \dots\}$, da cui $d_0 = 2$. Quindi lo stato 0 è periodico, ed essendo la catena irriducibile, tutti gli <u>stati sono periodici</u>.

⇝ La presenza di stati periodici in una catena di Markov irriducibile comporta l'esistenza di soluzioni oscillanti.

ESEMPIO #2



$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ricordando che $\pi(t) = \pi(0) P^t$, osserviamo che:

- se $\pi(0) = [0 \ 1 \ 0]$, allora $\pi(t) = [0 \ 1 \ 0]$ per ogni t, e quindi $\lim_{t\to\infty} \pi(t) = [0 \ 1 \ 0]$;
- se $\pi(0) = [0 \ 0 \ 1]$, allora $\pi(t) = [0 \ 0 \ 1]$ per ogni t, e quindi $\lim_{t\to\infty} \pi(t) = [0 \ 0 \ 1]$.

$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \pi(t)$ dipende dalla condizione iniziale!

Osservare che la catena non è irriducibile, e possiede due stati assorbenti.

---

analisi a regime per catene di Markov irriducibili

Teorema: In una catena di Markov irriducibile e aperiodica, i limiti $\pi_i = \lim_{t\to\infty} \pi_i(t)$ esistono sempre e sono indipendenti dal vettore delle probabilità dello stato all'istante iniziale, $\pi(0)$.

OSSERVAZIONE: Sotto le ipotesi del teorema, abbiamo che le quantità π_i esistono per ogni $i \in \mathcal{X}$, ma il teorema non dice nulla riguardo il fatto se $\sum_{i \in \mathcal{X}} \pi_i = 1$.

Ricordiamo che, in una catena irriducibile, vale una delle seguenti affermazioni:

i) tutti gli stati sono transitori

ii) tutti gli stati sono ricorrenti nulli

iii) tutti gli stati sono ricorrenti positivi

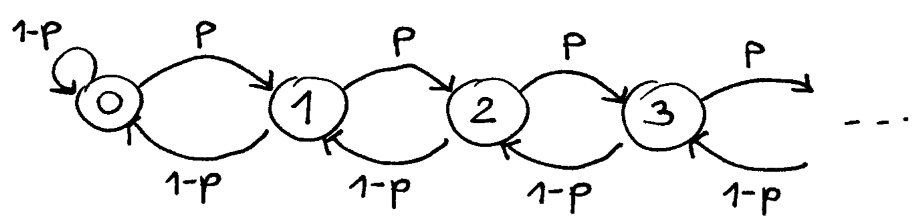
Nei casi i) e ii) vale il seguente risultato:

Teorema: In una catena di Markov irriducibile e aperiodica in cui tutti gli stati sono transitori, o tutti ricorrenti nulli, accade che

$$\pi_i = \lim_{t \to \infty} \pi_i(t) = 0$$

per ogni stato $i \in \mathcal{X}$, e non esiste dunque densità di probabilità stazionaria dello stato.

Esempio: si riprenda l'esempio della catena nascita-morte



Se $p > \frac{1}{2}$, tutti gli stati sono transitori.

Se $p = \frac{1}{2}$, tutti gli stati sono ricorrenti nulli.

In entrambi i casi, e per ogni stato i, accade che $\pi_i = 0$.

Infatti, lo stato della catena ha un "drift" verso destra ...

Nel caso iii) vale invece il seguente:

Teorema: In una catena di Markov irriducibile e aperiodica in cui tutti gli stati sono ricorrenti positivi, accade che

$$\pi_i = \lim_{t\to\infty} \pi_i(t) = \frac{1}{M_i}$$

dove M_i è il valore atteso del tempo di ricorrenza dello stato i.

Inoltre, $\sum_{i\in\mathcal{X}} \pi_i = 1$. Il vettore π delle probabilità stazionarie dello stato si può ottenere come l'unica soluzione del sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \pi = \pi P \\ \sum_{i\in\mathcal{X}} \pi_i = 1 \end{cases}$$

OSSERVAZIONE - Ricordando che $\pi(t)$ è soluzione dell'equazione alle differenze

$$\pi(t+1) = \pi(t)P,$$

se $\lim_{t\to\infty} \pi(t) = \pi$, allora anche $\lim_{t\to\infty} \pi(t+1) = \pi$, e si ottiene quindi la prima relazione soddisfatta da π:

$$\pi = \pi P$$

Tale sistema ha però infinite soluzioni ... (Perché?)

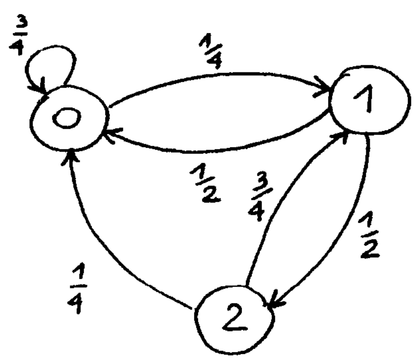
Sotto le ipotesi del teorema, il vincolo $\sum_{i\in\mathcal{X}} \pi_i = 1$ permette di selezionare l'unica soluzione che rappresenta una densità di probabilità discreta.

OSSERVAZIONE: Dato che ogni catena di Markov irriducibile e finita è costituita da stati ricorrenti positivi, si deduce dal teorema che

ogni catena di Markov irriducibile, aperiodica e finita ammette unica densità di probabilità stazionaria dello stato.

OSSERVAZIONE: La relazione $\pi_i = \dfrac{1}{M_i}$ ha una intuitiva interpretazione: quanto più piccolo è il valore atteso del tempo di ricorrenza dello stato i (cioè, quanto più frequentemente la catena visita in media lo stato i), tanto più grande è la probabilità a regime di trovare la catena nello stato i. Si osservi che $M_i \geq 1$, perché il tempo di ricorrenza $T_{i,i}$ può assumere i valori $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

ESEMPIO: catena irriducibile, aperiodica e finita.



$$\Rightarrow \quad P = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

Il vettore π delle probabilità stazionarie degli stati esiste ed è l'unica soluzione del sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} \frac{3}{4}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 = \pi_0 \\ \frac{1}{4}\pi_0 + \frac{3}{4}\pi_2 = \pi_1 \\ \frac{1}{2}\pi_1 = \pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

Una equazione è ridondante, e la scartiamo (per esempio, la prima).

Sostituendo la terza equazione nella seconda:

$$\frac{1}{4}\pi_0 + \frac{3}{8}\pi_1 = \pi_1 \Rightarrow \frac{1}{4}\pi_0 = \frac{5}{8}\pi_1 \Rightarrow \pi_0 = \frac{5}{2}\pi_1$$

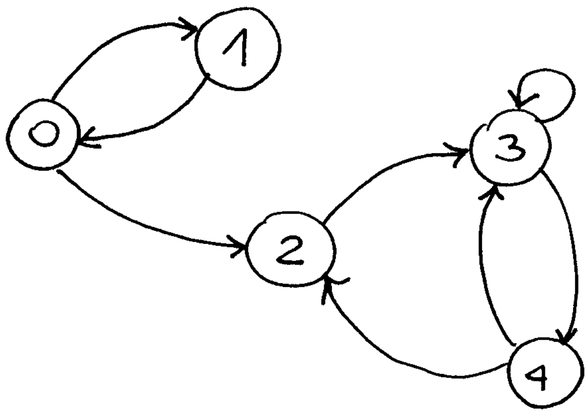
Sostituendo nella quarta:

$$\frac{5}{2}\pi_1 + \pi_1 + \frac{1}{2}\pi_1 = 1 \Rightarrow 4\pi_1 = 1 \Rightarrow \pi_1 = \frac{1}{4}$$

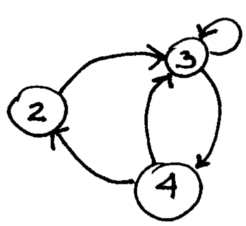
$$\pi_0 = \frac{5}{2}\pi_1 = \frac{5}{8} \quad ; \quad \pi_2 = \frac{1}{2}\pi_1 = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad \pi = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

Cosa si può fare nel caso di catene <u>non irriducibili</u>?

ESEMPIO



- catena non irriducibile ($S = \{2,3,4\}$ è un sottoinsieme chiuso)
- tuttavia possiamo ragionare nel seguente modo:
  - $S = \{2,3,4\}$ è un sottoinsieme chiuso, <u>irriducibile</u>, <u>aperiodico</u> e <u>finito</u>.
    Limitandoci a considerare



possiamo calcolare $[\pi_2 \ \pi_3 \ \pi_4]$ utilizzando il precedente teorema.

  - Se la catena si trova in $S' = \{0,1\}$, lo stato in generale oscillerà tra 0 e 1, ma prima o poi effettuerà la transizione $0 \to 2$, entrando in S, dal quale non uscirà più.
  - Quindi la catena ammette distribuzione di probabilità stazionaria degli stati, e il vettore π è così fatto:

$$\pi = [\,0 \ \ 0 \ \ \pi_2 \ \ \pi_3 \ \ \pi_4\,].$$