CATENE DI MARKOV OMOGENEE A TEMPO DISCRETO

Probabilità degli stati

Definiamo

$$\pi_j(t) = P(X(t)=j)$$

la probabilità che la catena si trovi nello stato j all'istante t.

Indichiamo con $\pi(t)$ il vettore riga delle probabilità degli stati all'istante t:

$$\pi(t) = [\pi_0(t) \ \pi_1(t) \ \pi_2(t) \ \dots]$$

Come calcolare $\pi_j(t)$?

$$\pi_j(t+1) = P(X(t+1)=j) = \sum_{i \in X} \underbrace{P(X(t+1)=j \mid X(t)=i)}_{p_{i,j}} \underbrace{P(X(t)=i)}_{\pi_i(t)}$$

regola della probabilità totale

$$\Rightarrow \quad \pi_j(t+1) = \sum_{i \in X} \pi_i(t)\, p_{i,j}$$

⤳ prodotto di $\pi(t)$ per la j-esima colonna di P

$\Rightarrow$ in forma matriciale:

$$\boxed{\pi(t+1) = \pi(t) P}$$

Dunque $\pi(t)$ è soluzione dell'equazione alle differenze scritta sopra, con condizione iniziale $\pi(0)$. Da Fondamenti di Automatica:

$$\boxed{\pi(t) = \pi(0) P^t}$$

Questa relazione permette di calcolare le probabilità degli stati a un generico istante t, note:

- la matrice delle probabilità di transizione in un passo, P
- il vettore delle probabilità degli stati all'istante iniziale, $\pi(0)$.

Ricapitolando, una catena di Markov omogenea a tempo discreto è completamente definita da una terna $(\mathcal{X}, \pi(0), P)$ dove:

- $\mathcal{X}$ è lo spazio di stato (discreto) della catena
- $\pi(0)$ è il vettore (riga) delle probabilità degli stati all'istante iniziale
- P è la matrice delle probabilità di transizione in un passo.

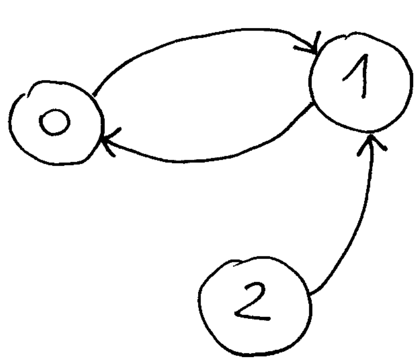
CLASSIFICAZIONE DEGLI STATI

Ricordiamo le probabilità di transizione in n passi:

$$p_{i,j}(n) = P(X(t+n)=j \mid X(t)=i) \quad \underline{\text{indipendente da } t}$$

Definizione – Uno stato $j \in \mathcal{X}$ si dice RAGGIUNGIBILE da uno stato $i \in \mathcal{X}$ se $p_{i,j}(n) > 0$ per qualche $n = 1, 2, \ldots$

Osservazione – Considerando il grafo di transizione dello stato, j è raggiungibile da i se e solo se esiste un cammino orientato sul grafo dal nodo i al nodo j.

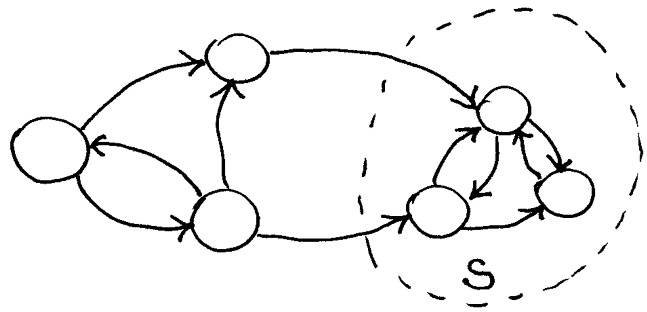


- 2 non è raggiungibile da 0
- 0 è raggiungibile da 2

<u>Definizione</u> - Un sottoinsieme $S \subseteq \mathcal{X}$ si dice <u>chiuso</u> se

$$p_{i,j} = 0 \quad \forall i \in S, j \notin S.$$

<u>osservazione</u> - Se S è chiuso, nel grafo di transizione dello stato non esistono archi uscenti da S verso stati non appartenenti a S.

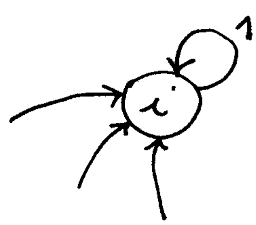


• S è un sottoinsieme chiuso

<u>in pratica</u>: quando lo stato della catena entra in un sottoinsieme chiuso, vi rimane "intrappolato" (non ne esce più...).

<u>Definizione</u> - Uno stato $i \in \mathcal{X}$ si dice <u>assorbente</u> se forma un sottoinsieme chiuso di cui è l'unico elemento.

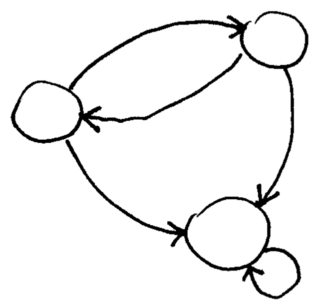
<u>osservazione</u> - Uno stato i è assorbente se e solo se $p_{i,i} = 1$.



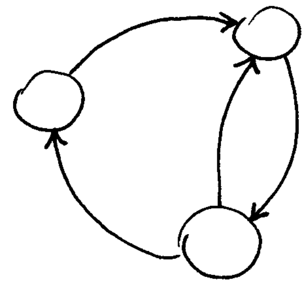
<u>Definizione</u> - Un sottoinsieme chiuso $S \subseteq \mathcal{X}$ si dice <u>irriducibile</u> se qualsiasi stato di S è raggiungibile da qualsiasi altro stato di S.

<u>Definizione</u> - Una catena di Markov omogenea si dice <u>irriducibile</u> se lo spazio di stato $\mathcal{X}$ è un insieme irriducibile.

<u>osservazione</u> - In particolare, in una catena di Markov irriducibile non esistono né sottoinsiemi chiusi $S \subset \mathcal{X}$, né stati assorbenti.



non è irriducibile
(esiste uno stato assorbente)



irriducibile

Ci poniamo la seguente domanda:

Se la catena si trova in uno stato i, e lo abbandona, tornerà certamente nel futuro a visitare lo stato i?

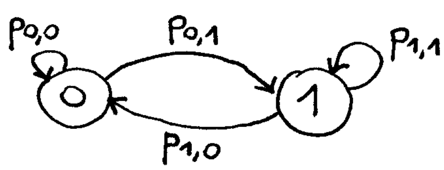
- se la risposta è NO: stato transitorio
- se la risposta è SI: stato ricorrente

Formalmente, definiamo il tempo di ricorrenza di uno stato $i \in \mathcal{X}$:

$$T_{i,i} = \min\{t>0 : X(0)=i, X(t)=i\}$$

è il primo istante di tempo in cui la catena ritorna nello stato i, considerando l'istante corrente (in cui la catena si trova nello stato i) come origine dei tempi.

esempio-



STATO	0	0
TEMPO	0	1

$\Rightarrow T_{0,0}=1$

STATO	0	1	1	0
TEMPO	0	1	2	3

$\Rightarrow T_{0,0}=3$

STATO	0	1	0
TEMPO	0	1	2

$\Rightarrow T_{0,0}=2$

si aggiorna l'origine dei tempi ogni volta che si ritorna nello stato 0

$T_{i,i}$ è una variabile aleatoria discreta che assume valori nell'insieme $\{1,2,3,4,\dots\}$.

Consideriamo le probabilità:

$$\rho_i(t) = P(T_{i,i}=t), \quad t=1,2,3,\dots$$

La probabilità di essere di nuovo, nel futuro, nello stato i è data da:

$$\rho_i = \sum_{t=1}^{\infty} \rho_i(t)$$

<u>Definizione</u>- Uno stato $i \in \mathcal{X}$ si dice <u>ricorrente</u> se $\rho_i = 1$; altrimenti (e cioè se $\rho_i < 1$) si dice <u>transitorio</u>.

in questo caso, $1-\rho_i$ è la probabilità di non tornare mai più nello stato i dopo averlo abbandonato.

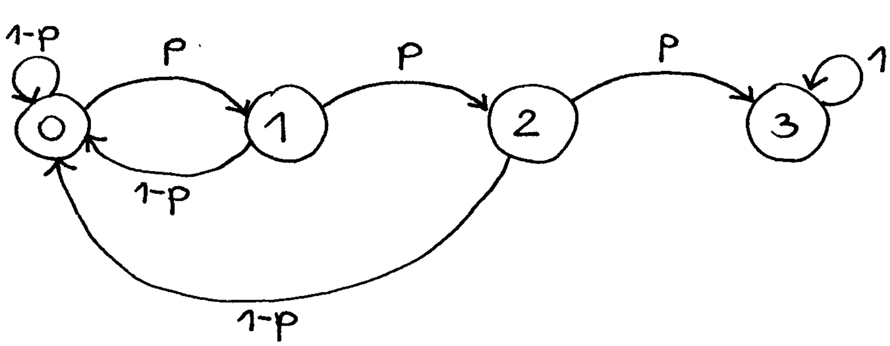
<u>Osservazione</u>- Se $i \in \mathcal{X}$ è ricorrente, allora $\rho_i = 1$, e cioè:

$\sum_{t=1}^{\infty} \rho_i(t) = 1$. Inoltre, $\rho_i(t) \in [0,1]$ perché sono probabilità.

Quindi, $\{\rho_i(t)\}_{t=1}^{\infty}$ è la <u>densità di probabilità discreta</u> della variabile aleatoria $T_{i,i}$.

<u>Esercizio (esame del 21/07/2009)</u>

Considerare la catena di Markov omogenea a tempo discreto descritta dal grafo di transizione dello stato ($p \in (0,1)$):



Calcolare la probabilità di ricorrenza ρ_0 dello stato 0, e classificare lo stato 0 come transitorio o ricorrente.

$\rightsquigarrow$ Abbiamo che:

$$\rho_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \rho_0(t) = \sum_{t=1}^{\infty} P(T_{0,0}=t)$$

Nel nostro caso, gli unici t che dobbiamo considerare sono $t=1,2,3$.

$$P(T_{0,0}=1) = P(X(1)=0|X(0)=0) = p_{0,0} = 1-p$$

$$P(T_{0,0}=2) = P(X(2)=0, X(1)\neq 0|X(0)=0)$$

$$= P(X(2)=0|X(1)=1)P(X(1)=1|X(0)=0) = p_{1,0}\cdot p_{0,1} = (1-p)p$$

$$P(T_{0,0}=3) = P(X(3)=0, X(2)\neq 0, X(1)\neq 0|X(0)=0)$$

$$= P(X(3)=0|X(2)=2)P(X(2)=2|X(1)=1)P(X(1)=1|X(0)=0)$$

$$= p_{2,0}\cdot p_{1,2}\cdot p_{0,1} = (1-p)p^2$$

$$\Rightarrow \rho_0 = (1-p)+(1-p)p+(1-p)p^2 = (1-p)(1+p+p^2) = 1-p^3 < 1$$

Dato che $\rho_0 < 1$, lo stato 0 è transitorio.

<u>Osservazione</u> - $1-\rho_0$ è la probabilità di non tornare mai più nel futuro nello stato 0. Risulta:

$$1-\rho_0 = 1-(1-p^3) = p^3$$

che in effetti coincide con la probabilità di andare a finire nello stato <u>assorbente</u> 3 a partire dallo stato 0.

<u>Risultati</u>

i) Se una catena di Markov ha uno spazio di stato finito, almeno uno degli stati è ricorrente.

ii) Se i è uno stato ricorrente, e j è raggiungibile da i, anche j è uno stato ricorrente.

iii) Se S è un sottoinsieme di stati chiuso, irriducibile e finito, allora ogni stato in S è ricorrente.

<u>CONSEGUENZA</u>: In una catena di Markov irriducibile e finita, ogni stato è ricorrente.

Sia i uno stato ricorrente. Questo implica che $T_{i,i}$ può assumere i valori $\{1,2,3,\dots\}$, <u>ma non ∞</u>, e le probabilità $\{p_i(t)\}$ definiscono una densità di probabilità discreta, che è proprio la densità di probabilità discreta della variabile aleatoria $T_{i,i}$.

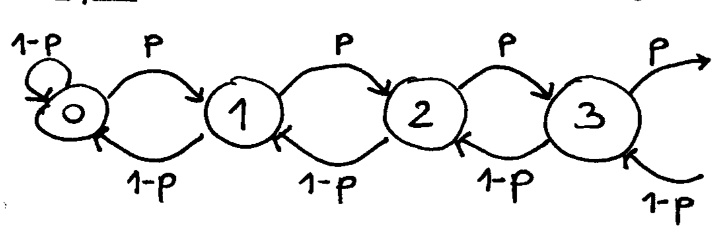
Indichiamo dunque con M_i il <u>valore atteso del tempo di ricorrenza</u> dello stato i (se esiste), dato da:

$$\boxed{M_i = E\left[T_{i,i}\right] = \sum_{t=1}^{\infty} t\, p_i(t)}$$

<u>Definizione</u> - Uno stato ricorrente i si dice <u>ricorrente positivo</u> se $M_i < +\infty$; altrimenti, si dice <u>ricorrente nullo</u>.

M_i esiste finito

<u>Esempio</u> - Considerare una catena nascita-morte del tipo:



... (infiniti stati)

Si dimostra che:

- se $p < \frac{1}{2}$, tutti gli stati sono ricorrenti positivi
- se $p = \frac{1}{2}$, " " " " " nulli
- se $p > \frac{1}{2}$, " " " " transitori.