CATENE DI MARKOV OMOGENEE A TEMPO DISCRETO

Definizione- Una catena di Markov a tempo discreto si dice omogenea se le probabilità di transizione in un passo non dipendono dal tempo per ogni coppia di stati $i, j \in \mathcal{X}$.

In questo caso scriviamo:

$$p_{i,j} = P(X(t+1)=j \mid X(t)=i) \qquad \text{indipendente da } t$$

In una catena di Markov omogenea a tempo discreto la matrice delle probabilità di transizione in un passo è COSTANTE:

$$P = \left[p_{i,j} \right]_{\substack{i\in\mathcal{X} \\ j\in\mathcal{X}}}$$

OSSERVAZIONE: Se P ha dimensioni finite ($\Leftrightarrow \mathcal{X}$ è finito), allora $\lambda=1$ è autovalore di P.

Infatti, si consideri il vettore $\mathbb{1}$ i cui elementi sono tutti 1. Risulta:

$$P\mathbb{1} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \sum_{j\in\mathcal{X}} p_{i,j} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbb{1}$$

Quindi $\mathbb{1}$ è autovettore di P relativo all'autovalore $\lambda=1$. □

Dall'equazione di Chapman-Kolmogorov otteniamo:

$$H(t,t+n) = \prod_{h=0}^{n-1} \underbrace{P(t+h)}_{\substack{\text{indipendente} \\ \text{dal tempo}}} = \prod_{h=0}^{n-1} P = P^n.$$

Quindi in una catena di Markov omogenea a tempo discreto anche le probabilità di transizione in n passi non dipendono da t, ma solo dall'orizzonte temporale n. Per questo scriviamo:

$$H(n) = \left[p_{i,j}(n) \right]_{\substack{i \in \mathcal{X} \\ j \in \mathcal{X}}}$$

dove

$$p_{i,j}(n) = P\left(X(t+n)=j \mid X(t)=i\right) \qquad \text{indipendente da } t.$$

Per quanto visto sopra:

$$\boxed{H(n) = P^n}$$

soluzione dell'equazione alle differenze:

$$H(n+1) = H(n)P \qquad \text{(equazione di Chapman-Kolmogorov per catene di Markov omogenee a TD)}$$

con condizione iniziale $H(0) = I$.

Utilizzo di $H(n)$

Supponiamo di voler calcolare

$$p_{i,j}(n) = P\left(X(t+n)=j \mid X(t)=i\right)$$

Il calcolo di $p_{i,j}(n)$ richiede di considerare tutti i cammini di n passi dallo stato i allo stato j. Tuttavia, il numero di tali cammini può risultare intrattabile già per piccoli valori di n...

Può risultare allora conveniente calcolare $\underbrace{H(n) = P^n}_{\text{problema algebrico!}}$, e prenderne l'elemento di posto (i,j).

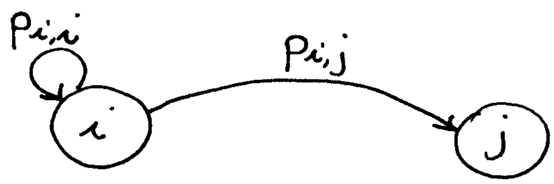
Per calcolare $H(n) = P^n$ si può per esempio utilizzare il metodo della trasformata $\mathcal{Z}$:

$$\mathcal{Z}\left[P^n\right] = z(zI-P)^{-1} + \text{scomposizione in fratti semplici} + \text{antitrasformata}$$

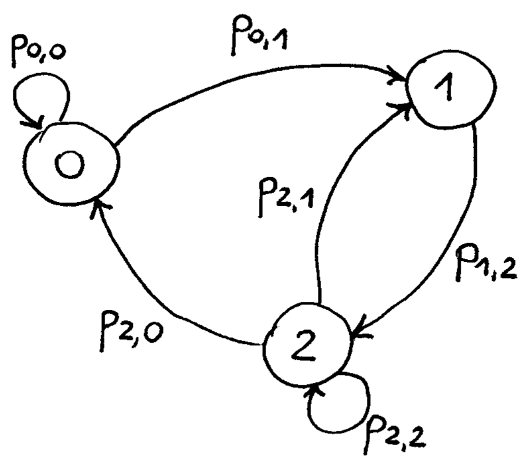
Rappresentazione grafica

Una catena di Markov omogenea a tempo discreto può essere rappresentata con un grafo di transizione in cui:

- i nodi sono gli stati della catena
- si mette un arco orientato dal nodo i al nodo j <u>se e solo se</u> $p_{i,j} \neq 0$; $p_{i,j}$ è l'etichetta di tale arco.



ESEMPIO



Supponiamo di voler calcolare $P(X(t+10)=2 \mid X(t)=1)$.

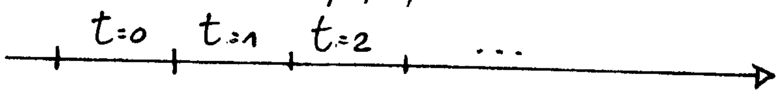
<u>approccio diretto</u>: determinare tutti i cammini di lunghezza 10 dal nodo 1 al nodo 2 (per esempio, $1 \xrightarrow{p_{1,2}} 2 \xrightarrow{p_{2,2}} 2 \xrightarrow{p_{2,0}} 0 \xrightarrow{p_{0,0}} 0 \xrightarrow{p_{0,1}} 1 \xrightarrow{p_{1,2}} 2 \xrightarrow{p_{2,1}} 1 \xrightarrow{p_{1,2}} 2 \xrightarrow{p_{2,1}} 1 \xrightarrow{p_{1,2}} 2$), fare il prodotto delle probabilità lungo ciascun cammino, sommare tutti i prodotti.
$\Rightarrow$ infattibile "a mano" (i cammini sono tanti!)

<u>approccio algebrico</u>: calcolare $H(10) = P^{10}$ e prendere l'elemento di posto $(1,2)$.

‖ questo prodotto tiene in conto tutti i possibili cammini di lunghezza 10 sul grafo!

Esempio: semplice processo di chiamate telefoniche

- Il tempo viene suddiviso in intervalli di uguale ampiezza, ciascuno etichettato da un indice $t = 0, 1, 2, \dots$



- Al più una singola chiamata avviene in ciascun intervallo. La probabilità di avere una chiamata in un intervallo è α.

- Se la linea è occupata, una nuova chiamata in arrivo viene rifiutata e persa; altrimenti, viene processata.

- C'è una probabilità β che una chiamata in fase di processamento termini in un intervallo.

- Se nello stesso intervallo avvengono sia il completamento di una chiamata che l'arrivo di una nuova chiamata, la nuova chiamata viene processata.

- Si assume che gli arrivi e i completamenti delle chiamate sono indipendenti tra loro e dallo stato del processo.

$\rightsquigarrow$ modello come catena di Markov omogenea a tempo discreto:

- spazio di stato: $\mathcal{X} = \{0, 1\}$
  0: linea libera
  1: linea occupata

- matrice delle probabilità di transizione in un passo:

$$P = \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} \\ p_{1,0} & p_{1,1} \end{bmatrix}$$

dove:

$$p_{0,0} = P(X(t+1)=0 \mid X(t)=0) = P(\text{nessun arrivo nel } (t+1)\text{-esimo intervallo})$$
$$= 1 - \alpha$$

$$p_{1,0} = P(X(t+1)=0 \mid X(t)=1) = P(\text{completamento } \underline{\underline{\text{e}}} \text{ nessun arrivo nel } (t+1)\text{-esimo intervallo})$$

$= P(\text{completamento})\, P(\text{nessun arrivo}) = \beta \cdot (1-\alpha)$

Indipendenza

Dato che la somma lungo ogni riga di P deve essere 1, risulta:

$p_{0,1} = 1 - p_{0,0} = \alpha$

$p_{1,1} = 1 - p_{1,0} = 1 - \beta(1-\alpha)$

<u>verifica</u>

$p_{0,1} = P(X(t+1)=1 \mid X(t)=0) = P(\text{un arrivo nel } (t+1)\text{-esimo intervallo}) = \alpha$

$p_{1,1} = P(X(t+1)=1 \mid X(t)=1)$

$= P\big((\text{nessun completamento})$ <u>oppure</u> $(\text{completamento}$ <u>e</u> $\text{arrivo})$ nel $(t+1)$-esimo intervallo$\big)$

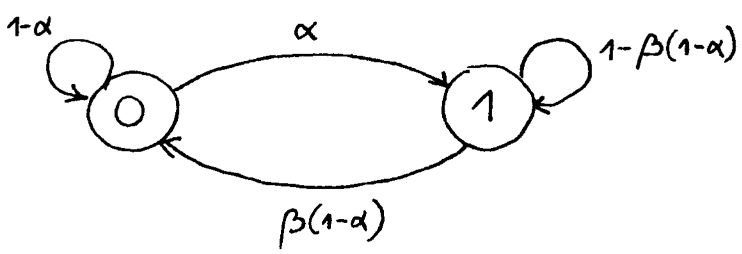
$= P(\text{nessun completamento}) + P(\text{completamento})\, P(\text{arrivo})$

eventi disgiunti + indipendenti

$= (1-\beta) + \beta \cdot \alpha = 1 - \beta(1-\alpha)$

$$\Rightarrow \quad P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta(1-\alpha) & 1-\beta(1-\alpha) \end{bmatrix}$$

<u>diagramma di transizione dello stato</u>



Tempo di soggiorno in uno stato

Consideriamo il tempo di soggiorno in uno stato della catena, cioe' il numero di istanti di tempo che la catena trascorre in tale stato prima di abbandonarlo:

$V(i)$ = tempo di soggiorno nello stato $i \in \mathcal{X}$.

$V(i)$ e' una variabile aleatoria discreta che puo' assumere i valori $\{1, 2, 3, \ldots\}$.

Vogliamo determinare la densita' di probabilita' discreta di $V(i)$.

- $P(V(i)=1) = P(X(t+1) \neq i \mid X(t)=i)$

$$= 1 - P(X(t+1)=i \mid X(t)=i) = 1 - p_{i,i}$$

- $P(V(i)=2) = P(X(t+2) \neq i, X(t+1)=i \mid X(t)=i)$

$$= P(X(t+2) \neq i \mid X(t+1)=i, X(t)=i)\, P(X(t+1)=i \mid X(t)=i)$$

$$= P(X(t+2) \neq i \mid X(t+1)=i)\, P(X(t+1)=i \mid X(t)=i)$$

proprieta' di Markov

$$= (1-p_{i,i})\, p_{i,i}$$

- $P(V(i)=3) = P(X(t+3) \neq i, X(t+2) = X(t+1) = i \mid X(t)=i)$

$$= \ldots$$

$$= P(X(t+3) \neq i \mid X(t+2)=i)\, P(X(t+2)=i \mid X(t+1)=i)\, P(X(t+1)=i \mid X(t)=i)$$

$$= (1-p_{i,i}) \cdot p_{i,i} \cdot p_{i,i} = (1-p_{i,i})\, p_{i,i}^2$$

Generalizzando:

$$\boxed{P(V(i)=n) = (1-p_{i,i})\, p_{i,i}^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots}$$

→ densita' geometrica con parametro $p_{i,i}$

<u>OSSERVAZIONE</u>: La densità geometrica è <u>l'unica</u> densità di probabilità discreta che gode della <u>proprietà di mancanza di memoria</u>:

$$P(V(i)=n+m \mid V(i)>n) = \qquad (m>0)$$

$$= \frac{P(V(i)=n+m, V(i)>n)}{P(V(i)>n)} = \frac{P(V(i)=n+m)}{P(V(i)>n)} =$$

$$= P(X(t+n)=\ldots=X(t+1)=i \mid X(t)=i)$$

$$= \frac{(1-p_{i,i})\,p_{i,i}^{n+m-1}}{p_{i,i}^{n}}$$

$$= (1-p_{i,i})\,p_{i,i}^{m-1} = P(V(i)=m).$$