

CATENE DI MARKOV A TEMPO DISCRETO

Processi stocastici con:

- tempo discreto:  $T = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- stato discreto:  $X \in \{0, 1, 2, \dots\} = \mathcal{X}$
- proprietà di Markov

$$P(X(t+1)=x_{t+1} | X(t)=x_t, \dots, X(0)=x_0) = P(X(t+1)=x_{t+1} | X(t)=x_t)$$

$$\forall t \in T, \forall x_0, \dots, x_t, x_{t+1} \in \mathcal{X}$$



NOTA: Corrisponde alla scelta

$$t_0=0, \dots, t_h=t, t_{h+1}=t+1$$

nella riscrittura della proprietà di Markov nel caso di catene.

Osserviamo dunque che una catena di Markov a tempo discreto è caratterizzata da probabilità di transizione in un passo del tipo:

$$p_{i,j}(t) = P(X(t+1)=j | X(t)=i) \quad \forall t \in T, \forall i, j \in \mathcal{X}$$

In forma matriciale, possiamo definire la matrice delle probabilità di transizione in un passo:

$$P(t) = \left[ p_{i,j}(t) \right]_{\substack{i \in \mathcal{X} \\ j \in \mathcal{X}}} = \begin{bmatrix} p_{0,0}(t) & p_{0,1}(t) & p_{0,2}(t) & \dots \\ p_{1,0}(t) & p_{1,1}(t) & \dots \\ p_{2,0}(t) & \dots \\ \vdots & \end{bmatrix}$$

OSSERVAZIONE: La somma lungo qualsiasi riga di  $P(t)$  fa 1. Infatti:

2

$$\sum_{j \in X} p_{i,j}(t) = P(\underbrace{X(t+1) \in X}_{\text{evento certo}} | X(t)=i) = 1.$$

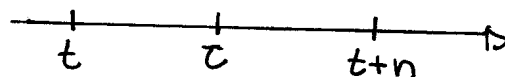
Consideriamo ora la generica probabilità di transizione in n passi:

$$p_{i,j}(t, t+n) = P(X(t+n)=j | X(t)=i), \quad n=0,1,2,\dots, t \in T, i,j \in X$$

e, fissato  $\tau \in T: t \leq \tau \leq t+n$ ,

consideriamo la partizione

dell'evento certo  $\{X(\tau)=r: r \in X\}$ .



Applicando la regola della probabilità totale e la proprietà di Markov, otteniamo:

$$\begin{aligned} p_{i,j}(t, t+n) &= P(X(t+n)=j | X(t)=i) \\ &= \sum_{r \in X} P(X(t+n)=j | X(\tau)=r, X(t)=i) P(X(\tau)=r | X(t)=i) \\ &= \sum_{r \in X} P(X(t+n)=j | X(\tau)=r) P(X(\tau)=r | X(t)=i) \\ &= \sum_{r \in X} p_{r,j}(\tau, t+n) p_{i,r}(t, \tau) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{p_{i,j}(t, t+n) = \sum_{r \in X} p_{i,r}(t, \tau) p_{r,j}(\tau, t+n) \quad \forall t \leq \tau \leq t+n}$$

- equazione di Chapman-Kolmogorov a tempo discreto -

Convienne riscrivere l'equazione di Chapman-Kolmogorov in forma matriciale.

A tal fine si definisce:

$$H(t, t+n) = \left[ p_{i,j}(t, t+n) \right]_{\substack{i \in \mathcal{X} \\ j \in \mathcal{X}}}$$

$$= \begin{bmatrix} p_{0,0}(t, t+n) & p_{0,1}(t, t+n) & p_{0,2}(t, t+n) & \dots \\ p_{1,0}(t, t+n) & p_{1,1}(t, t+n) & \dots & \\ p_{2,0}(t, t+n) & \dots & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

Si osservi che:

- la somma lungo qualsiasi riga di  $H(t, t+n)$  fa 1. Infatti:

$$\sum_{j \in \mathcal{X}} p_{i,j}(t, t+n) = \sum_{j \in \mathcal{X}} P(X(t+n)=j | X(t)=i) = \underbrace{P(X(t+n) \in \mathcal{X} | X(t)=i)}_{\text{evento certo}} = 1.$$

- $H(t, t) = I$ . Infatti:

$p_{i,i}(t, t) = P(X(t)=i | X(t)=i) = 1$  e  $p_{i,j}(t, t) = P(X(t)=j | X(t)=i) = 0$  per  $j \neq i$ ,  
assumendo che non possano accadere più transizioni di stato in un singolo istante di tempo.

- $H(t, t+1) = P(t)$ . Infatti:

$$p_{i,j}(t, t+1) = P(X(t+1)=j | X(t)=i) = p_{i,j}(t) \quad \text{per ogni } i, j \in \mathcal{X}.$$

—————

Osservando, dall'equazione di Chapman-Kolmogorov precedentemente scritta, che il generico elemento  $p_{i,j}(t, t+n)$  di  $H(t, t+n)$  si ottiene come prodotto delle  $i$ -esima riga di  $H(t, \tau)$  per la  $j$ -esima colonna di  $H(\tau, t+n)$ , risulta:

$$\boxed{H(t, t+n) = H(t, \tau) H(\tau, t+n) \quad \forall t \leq \tau \leq t+n}$$

- forma matriciale dell'equazione di Chapman-Kolmogorov a tempo continuo -

(4)

Facendo la scelta  $\tau = t+n-1$ , otteniamo l'equazione di Chapman-Kolmogorov in avanti:

$$\begin{aligned} H(t, t+n) &= H(t, t+n-1) H(t+n-1, t+n) \\ &= H(t, t+n-1) P(t+n-1) \end{aligned} \Rightarrow \boxed{H(t, t+n) = H(t, t+n-1) P(t+n-1)}$$

Il termine "in avanti" fa riferimento al fatto che l'equazione può essere risolta andando avanti nel tempo. Infatti:

$$H(t, t+2) = H(t, t+1) P(t+1) = P(t) P(t+1)$$

$$H(t, t+3) = H(t, t+2) P(t+2) = P(t) P(t+1) P(t+2)$$

⋮

$$H(t, t+n) = H(t, t+n-1) P(t+n-1) = P(t) P(t+1) \dots P(t+n-2) P(t+n-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{H(t, t+n) = \prod_{h=0}^{n-1} P(t+h)}$$

Facendo invece la scelta  $\tau = t+1$ , otteniamo l'equazione di Chapman-Kolmogorov all'indietro, che si risolve appunto andando indietro nel tempo:

$$\begin{aligned} H(t, t+n) &= H(t, t+1) H(t+1, t+n) \\ &= P(t) H(t+1, t+n) \end{aligned} \Rightarrow \boxed{H(t, t+n) = P(t) H(t+1, t+n)}$$