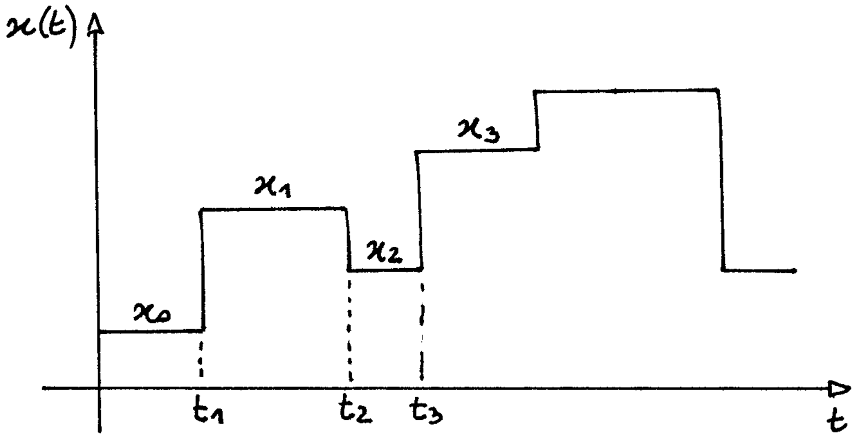
Consideriamo un automa a stati con temporizzazione stocastica $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, p, p_0, F)$.

Supponiamo $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

L'andamento nel tempo dello stato $x(t) \in \mathcal{X}$ e' costante a tratti:




In un automa stocastico gli istanti di tempo $\{t_1, t_2, t_3, \ldots\}$ sono aleatori, così come i valori dello stato $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$.

Dunque:

l'evoluzione nel tempo dello stato e' descritta da un processo stocastico $X(t)$.

Questo ci induce a parlare di processi stocastici...

## Processi Stocastici

Definizione: Un processo stocastico e' una collezione di variabili aleatorie $\{X(t)\}$ indicizzate da un indice temporale $t \in \Upsilon$, dove $\Upsilon$ rappresenta l'asse dei tempi.

Nel caso in cui $\Upsilon = \{0, 1, 2, \ldots\}$ (ossia $\Upsilon$ e' un insieme numerabile) il processo stocastico si dice a tempo discreto.

Nel caso in cui $\Upsilon = \mathbb{R}^+$, il processo stocastico si dice a tempo continuo.

Definizione: Si dice catena un processo stocastico $\{X(t)\}$ formato da variabili aleatorie discrete $X(t)$, $t \in \Upsilon$.

Una realizzazione del processo stocastico $\{X(t)\}$ si indica con $x(t)$.

Un processo stocastico è completamente caratterizzato se sono note le quantità:

$$P\big(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_h) \leq x_h\big)$$

$$\forall t_1 < t_2 < \dots < t_h \in T, \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_h \in \mathbb{R}, \quad \forall h = 1, 2, \dots$$

cioè se sono note le funzioni di distribuzione di probabilità congiunte di tutte le possibili h-uple di variabili aleatorie del processo stocastico.

Definizione: Dato il processo stocastico $\{X(t)\}$, per ogni $t \in T$ il valore atteso della variabile aleatoria $X(t)$ si indica con

$$E[X(t)] = m_X(t).$$

Definizione: Si definisce funzione di covarianza del processo stocastico $\{X(t)\}$ la funzione

$$R_X(t,s) = E\Big[\big(X(t) - m_X(t)\big)\big(X(s) - m_X(s)\big)\Big]$$

$$= \begin{cases} \text{varianza di } X(t) & \text{se } s = t \\ \text{covarianza di } X(t) \text{ e } X(s) & \text{se } s \neq t. \end{cases}$$

Definizione: (STAZIONARIETÀ FORTE)

Un processo stocastico $\{X(t)\}$ si dice stazionario in senso forte se

$$P\big(X(t_1+\tau) \leq x_1, \dots, X(t_h+\tau) \leq x_h\big) = P\big(X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_h) \leq x_h\big)$$

$$\forall t_1 < t_2 < \dots < t_h \in T, \ \forall x_1, x_2, \dots, x_h \in \mathbb{R}, \ \forall h = 1, 2, 3, \dots, \ \forall \tau.$$

<u>OSSERVAZIONE</u>: Nel caso di un processo stocastico $\{X(t)\}$ stazionario in senso forte, tutte le variabili aleatorie $X(t)$, $t \in T$, sono <u>identicamente distribuite</u>. Infatti, per $h=1$:

$$P\big(X(t+\tau) \leq x\big) = P\big(X(t) \leq x\big)$$

$\forall t \in T$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \tau$.

<u>Definizione</u>: (<u>STAZIONARIETÀ DEBOLE</u>)

Un processo stocastico $\{X(t)\}$ si dice <u>stazionario in senso debole</u> se

i) $m_X(t) = m_X(t+\tau)$

ii) $R_X(t,s) = R_X(t+\tau, s+\tau)$

per ogni $\tau$, e per ogni $t,s \in T$. In altre parole, $m_X(t)$ e $R_X(t,s)$ sono invarianti rispetto a traslazione nel tempo.

Ne segue che un processo stocastico $\{X(t)\}$ è stazionario in senso debole se e solo se:

i) $m_X(t) = m_X \quad \forall t \in T$

ii) $R_X(t,s) = R_X(t-s) \quad \forall t,s \in T$.

$$\tau = t-s$$

$$\Downarrow$$

$R_X(\tau) = E\big[(X(t+\tau)-m_X)(X(t)-m_X)\big]$ <u>indipendente da $t \in T$</u>.

<u>osservazione</u>: $R_X(0) = \sigma_X^2$ varianza di $X(t)$, $\forall t \in T$.

<u>OSSERVAZIONE</u>: Nel caso di un processo stocastico $\{X(t)\}$ stazionario in senso debole, tutte le variabili aleatorie $X(t)$, $t \in T$, hanno lo stesso valore atteso $m_X$ e la stessa varianza $\sigma_X^2$, ma in generale potrebbero seguire distribuzioni di probabilità differenti.

<u>FATTO</u>: stazionarietà in senso forte $\Rightarrow$ stazionarietà in senso debole.

Il viceversa non è vero, in generale.

<u>Definizione</u>: Un processo stocastico $\{X(t)\}$ si dice <u>indipendente</u> se $X(t_1), \dots, X(t_h)$ sono variabili aleatorie indipendenti per ogni $t_1 < \dots < t_h \in T$, $h = 2, 3, \dots$

<u>Definizione</u>: Un processo stocastico $\{X(t)\}$ si dice <u>identicamente distribuito</u> se tutte le variabili aleatorie $X(t)$, $t \in T$, seguono la stessa distribuzione di probabilità.

condizione necessaria per la stazionarietà in senso forte, ma non per quella in senso debole.

<u>FATTO</u>: Un processo stocastico $\{X(t)\}$ <u>indipendente</u> e <u>identicamente distribuito</u> è stazionario in senso debole.

Infatti:

- $m_X(t) = m_X \quad \forall t \in T$, perché le variabili aleatorie $X(t)$, $t \in T$, sono identicamente distribuite.
- $R_X(t,t) = E\left[(X(t) - m_X)(X(t) - m_X)\right] = \sigma_X^2 \quad \forall t \in T$, perché le variabili aleatorie $X(t)$, $t \in T$, sono identicamente distribuite.
- $R_X(t,s) = E\left[(X(t) - m_X)(X(s) - m_X)\right] = 0 \quad \forall t \neq s$, perché le variabili aleatorie $X(t)$ e $X(s)$, $t, s \in T$, sono indipendenti.

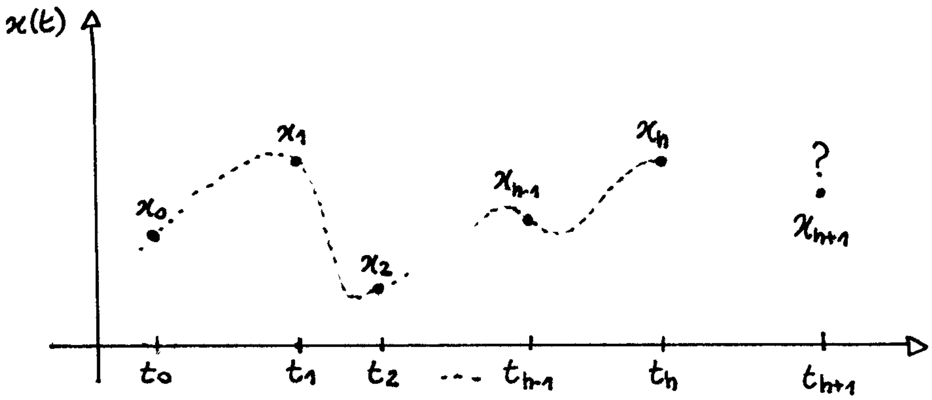
dunque:

$$R_X(t,s) = R_X(t-s) = \begin{cases} \sigma_X^2 & \text{se } t = s \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

# PROCESSI DI MARKOV



Supponiamo di osservare un processo stocastico $\{X(t)\}$ agli istanti di tempo $t_0 < t_1 < \ldots < t_h \in T$, $h = 0, 1, 2, \ldots$, e di voler fare una predizione (in senso probabilistico) sul valore dello stato del processo all'istante $t_{h+1} > t_h$.




Pensiamo a $x_h$ come allo stato corrente del processo stocastico, e a $\{x_0, x_1, \ldots, x_{h-1}\}$ come alla sua storia passata osservata. La variabile aleatoria $X(t_{h+1})$ rappresenta il futuro non noto.

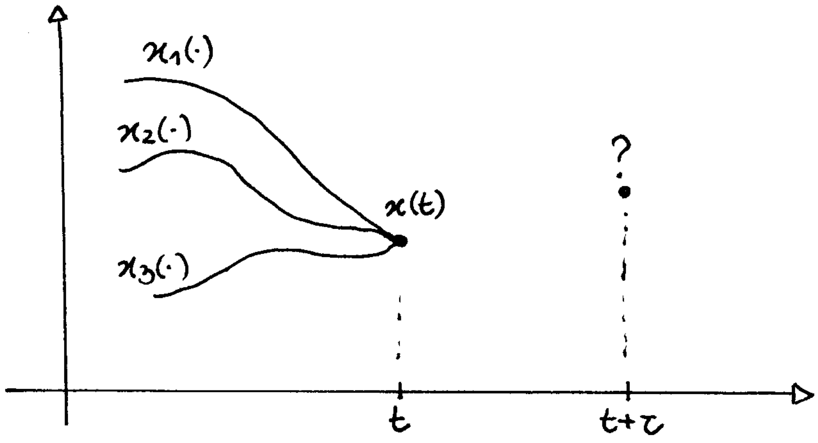
In un processo indipendente, la conoscenza dello stato corrente e della storia passata non apporta alcuna informazione aggiuntiva che permetta di "affinare" la predizione su $X(t_{h+1})$.
Possiamo parlare di "impredicibilità" di $X(t_{h+1})$ dati $\{x_0, x_1, \ldots, x_h\}$.

Nei processi di Markov questa forte proprietà è parzialmente rilassata: l'informazione aggiuntiva che permette di "affinare" la predizione su $X(t_{h+1})$ è tutta contenuta in $x_h$. Ossia, la conoscenza della storia passata e dello stato corrente non è più informativa della sola conoscenza dello stato corrente.
Formalmente:

Definizione: Un processo stocastico $\{X(t)\}$ si dice PROCESSO DI MARKOV se

$$P(X(t+\tau) \le \bar{x} \mid X(s) = x(s)\ \forall s \le t) = P(X(t+\tau) \le \bar{x} \mid X(t) = x(t))$$

$$\forall \tau > 0,\ \forall \bar{x} \in \mathbb{R},\ \forall x(\cdot),\ \forall t \in T.$$




la predizione su $X(t+\tau)$ che possiamo fare all'istante $t$ è identica nei tre casi, perchè all'istante $t$ le tre traiettorie $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$ e $x_3(\cdot)$ assumono lo stesso valore $x(t)$.

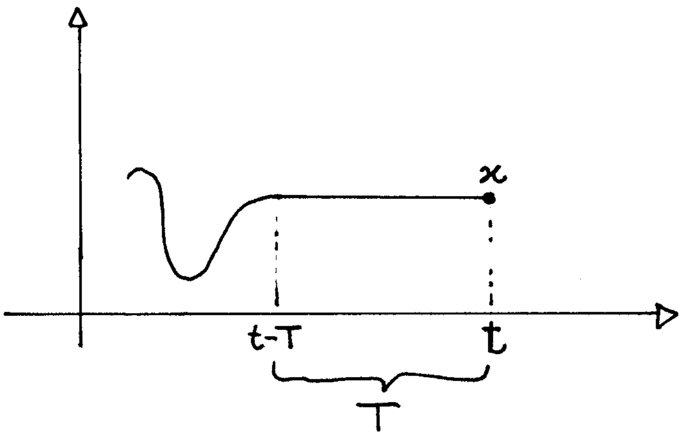
NOTA- Ragionare sul fatto che M1 fa dello stato di un processo di Markov uno "stato" nell'accezione della Teoria dei Sistemi...

Un processo di Markov è caratterizzato da due aspetti fondamentali:

M1) È irrilevante la traiettoria passata degli stati, noto lo stato corrente.

M2) È irrilevante quanto tempo il processo ha trascorso nello stato corrente.

Infatti, si supponga che $X(s)=x \quad \forall s \in [t-T, t]$, $T>0$.




Per la proprietà di Markov risulta:

$$P\left(X(t+\tau) \le \bar{x} \mid X(s)=x \quad \forall s \in [t-T, t]\right) = P\left(X(t+\tau) \le \bar{x} \mid X(t)=x\right)$$

indipendentemente da $T$ (tempo di soggiorno nello stato $x$).

# CATENE DI MARKOV

Una catena di Markov è una catena che gode della proprietà di Markov.

processo stocastico con stato discreto

Nel caso di una catena di Markov $\{X(t)\}$, la proprietà di Markov può essere equivalentemente riscritta nel seguente modo:

$$P(X(t_{h+1})=x_{h+1} \mid X(t_h)=x_h, \dots, X(t_0)=x_0) =$$

$$= P(X(t_{h+1})=x_{h+1} \mid X(t_h)=x_h)$$

$$\forall t_0<t_1<\dots<t_h<t_{h+1} \in \Upsilon, \ \forall x_0, x_1, \dots, x_h, x_{h+1} \in \mathcal{X}, \ \forall h=0,1,2,\dots$$

Dunque il comportamento stocastico di una catena di Markov è descritto da probabilità di transizione della forma:

$$P(X(t)=x' \mid X(s)=x) \quad \forall s<t \in \Upsilon.$$

Date le probabilità di transizione e la densità di probabilità discreta dello stato all'istante iniziale, è possibile determinare la densità di probabilità discreta dello stato in un qualsiasi istante di tempo. Infatti:

$$P(X(t)=x') = \sum_{x \in \mathcal{X}} P(X(t)=x' \mid X(0)=x)\, P(X(0)=x)$$

regola della probabilità totale

Tuttavia, ricavare le probabilità di transizione dai dati di un problema può richiedere, in generale, lo svolgimento di calcoli complessi.

Vedremo casi (catene di Markov omogenee e finite) dove ciò si riduce alla soluzione di un insieme di equazioni differenziali (a tempo continuo) o alle differenze (a tempo discreto) lineari e stazionarie, problema per il quale si dispone di strumenti sia teorici che analitici.