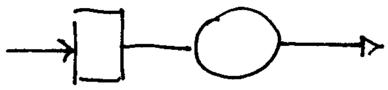
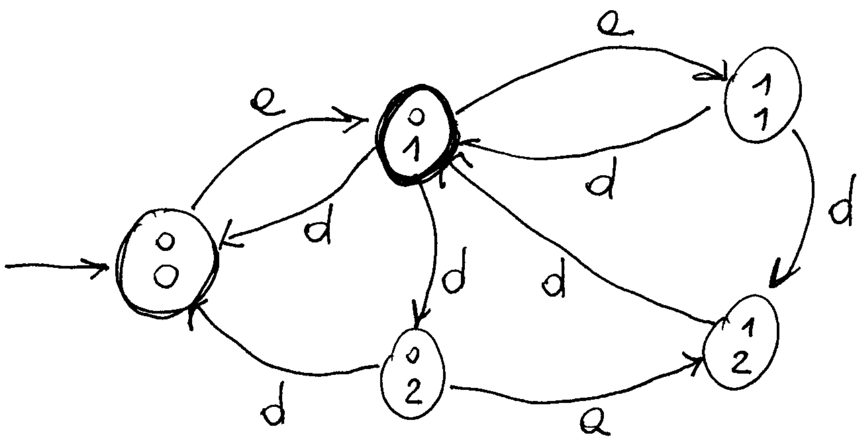
# ESERCIZIO 1





$\mathcal{E} = \{a, d\}$

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\begin{array}{l} x_1 \to \text{buffer: } \overset{0}{\text{vuoto}}, \overset{1}{\text{occupato}} \\ x_2 \to \text{macchina: } \overset{0}{\text{libera}}, \overset{1}{1^a \text{ lav.}}, \overset{2}{2^a \text{ lav.}} \end{array}$




$$p\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, d\right) = p$$

$$p\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, d\right) = p$$

$$F = \{F_a, F_d\}$$

$$F_a(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0 \qquad \lambda = 0.25$$

$$F_d(t) = 1 - e^{-\mu t}, \quad t \geq 0 \qquad \mu = 0.5$$

ii) $X_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$P($termina la $1^a$ lavorazione, il pezzo è difettoso, termina la $2^a$ lavorazione, il pezzo è difettoso, e nel frattempo non ci sono stati arrivi di nuovi pezzi $\mid X_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix})$

$$= \frac{\mu}{\lambda+\mu} p \frac{\mu}{\lambda+\mu} p = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} p\right)^2 = \frac{1}{144}$$

iii) $$P(Z\le t) = \overbrace{P(Z_1\le t)}^{1-e^{-\mu t}}\,\overbrace{P(\text{non difettoso})}^{1-p} + P(Z_1+Z_2\le t)\,\underbrace{P(\text{difettoso})}_{p}$$

$Z$: tempo trascorso da un pezzo nella macchina

partizione dell'evento certo:

{pezzo difettoso dopo la 1ª lavorazione, pezzo non difettoso dopo la 1ª lavorazione}

$Z_1$: durata della 1ª lavoraz. (v.a. esp. con tasso $\mu$)

$Z_2$: durata della 2ª lavoraz. (v.a. esp. con tasso $\mu$)

indipendenti

$$P(Z\le t) = (1-e^{-\mu t})(1-p) + P(Z_1+Z_2\le t)\,p$$

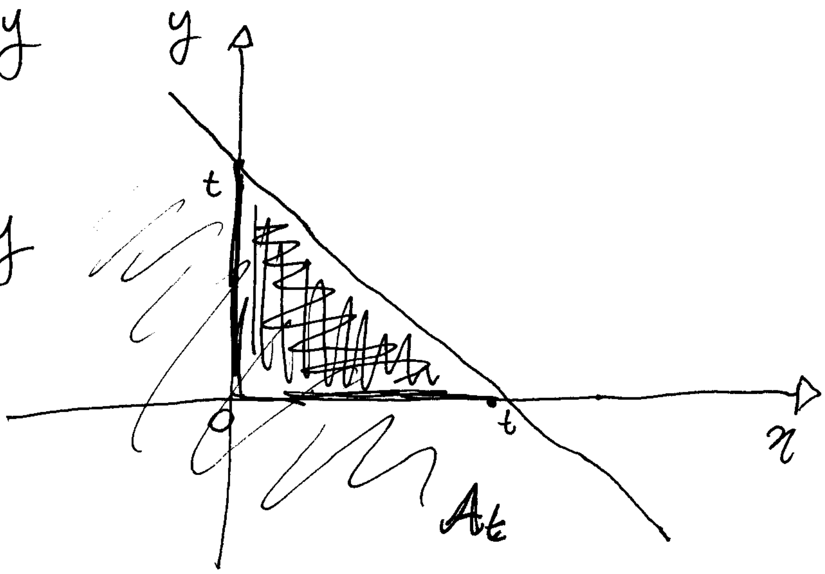
$$P(Z_1+Z_2\le t) = P((Z_1,Z_2)\in A_t)$$

$$A_t = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\le t\}$$

$$= \iint_{A_t} f_{Z_1}(x) f_{Z_2}(y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^t\int_0^{-x+t} \mu e^{-\mu x}\cdot \mu e^{-\mu y}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^t \mu e^{-\mu x}\left[-e^{-\mu y}\right]_0^{t-x} dx$$



$$= \int_0^t \mu e^{-\mu x}\left(1 - e^{-\mu(t-x)}\right) dx$$

$$= \int_0^t \left(\mu e^{-\mu x} - \mu e^{-\mu t}\right) dx$$

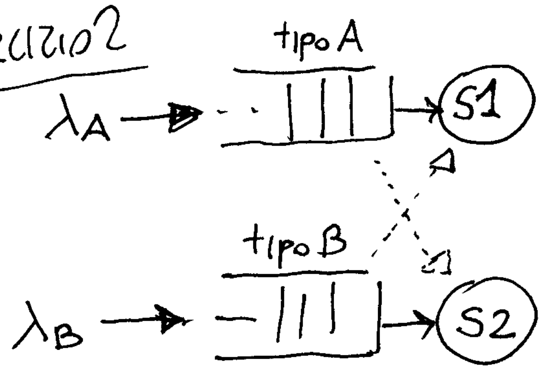
$$= \left[-e^{-\mu x} - \mu e^{-\mu t} x\right]_0^t = 1 - e^{-\mu t} - \mu t e^{-\mu t}$$

$$= 1 - (1+\mu t)\, e^{-\mu t} \qquad t \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P(Z \leq t) = \left(1 - e^{-\mu t}\right)(1-p) + \left(1 - (1+\mu t) e^{-\mu t}\right) p}$$

$$= 1 - e^{-\mu t}(1 + p\mu t), \quad t \geq 0$$

Esercizio 2




④

$\lambda_A = 14$ clienti/ora

$\lambda_B = 8$ clienti/ora.

$\mu_A = \frac{1}{3}$ clienti/min $= 20$ clienti/ora

$\mu_B = \frac{1}{5}$ clienti/min.
$= 12$ clienti/ora.

1) $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{bmatrix}$

$x_1 \rightarrow$ servente S1 : libero, occ. A, occ. B

$x_2 \rightarrow$ servente S2 : libero, occ. A, occ. B

$n_3 \rightarrow$ coda di tipo A (non in servizio) : 0, 1, 2, ...

$n_4 \rightarrow$ coda di tipo B (non in servizio) : 0, 1, 2, ...

$\mathcal{E} = \{ a_A, a_B, d_{A1}, d_{A2}, d_{B1}, d_{B2} \}$

$a_A$: arrivo di tipo A; $a_B$: arrivo di tipo B; $d_{A1}$: $\mu_A$; $d_{A2}$: $\mu_A$; $d_{B1}$: $\mu_B$; $d_{B2}$: $\mu_B$

~~$d_A, d_B$~~

~~$\boxed{d_1, d_2}$~~

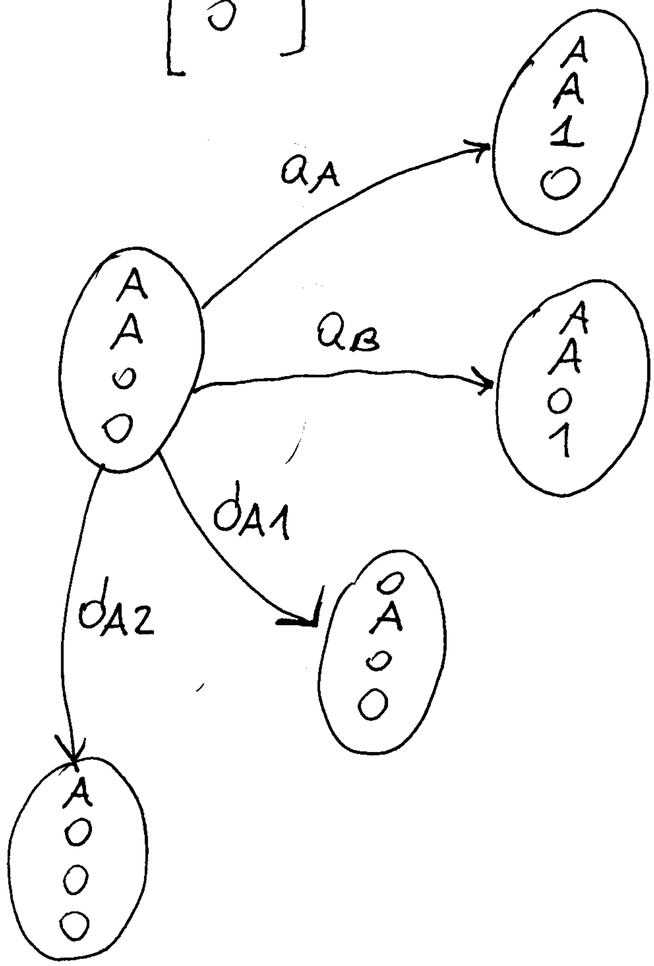
$(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, f, x_0, F)$

$F$:

S1 $\leftarrow$ tipo A $\quad d_1 \sim$ esp. $\mu_A$

S1 $\leftarrow$ tipo B $\quad d_1 \sim$ esp. $\mu_B$

1.1) $X_k = \begin{bmatrix} A \\ A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$




tempo soggiorno nello stato $\begin{bmatrix} A \\ A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ = $Y_k^*$ nello stato $\bar{x}_k = \begin{bmatrix} A \\ A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$Y_k^* \sim$ esp. con tasso $\lambda_A + \lambda_B + 2\mu_A$

$$\boxed{E[Y_k^*] = \frac{1}{\lambda_A + \lambda_B + 2\mu_A}} = \frac{1}{62} \text{ ore} \simeq 58 \text{ sec.}$$

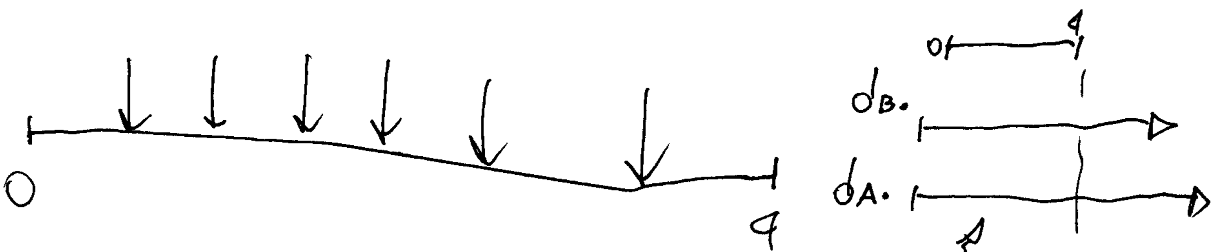
iii) $X_k = \begin{bmatrix} A \\ A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

il prox. cliente che arriva e' di tipo B e trova S2 libero.

$$P\left(\begin{array}{l}\text{termina la lavorazione in S2 prima di un qualsiasi arrivo,}\\ \text{poi il prossimo arrivo e di tipo B}\end{array} \middle| X_k = \begin{bmatrix} A \\ A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{\mu_A}{\lambda_A + \lambda_B + \mu_A} \cdot \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} = \frac{40}{231} \simeq 0.1732$$

iv) $X_k = \begin{bmatrix} A \\ B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ oppure $X_k = \begin{bmatrix} B \\ A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$




$$\Rightarrow P\left(\begin{array}{l}\text{6 arrivi generici in } [0,4] \text{ minuti,}\\ \text{nessun servizio in } [0,4] \text{ minuti}\end{array}\right)$$

processo degli arrivi generici e' un processo di Poisson con tasso $\lambda_A + \lambda_B$

$$= \underbrace{\frac{\left((\lambda_A+\lambda_B)\cdot 4\right)^6}{6!} e^{-(\lambda_A+\lambda_B)\cdot 4}}_{\text{valore della distrib. di Poisson per } \lambda = \lambda_A+\lambda_B,\ t=4,\ n=6.} \cdot e^{-\mu_A \cdot 4} \cdot e^{-\mu_B \cdot 4}$$

$= 0.00038$

($\lambda_A, \lambda_B, \mu_A, \mu_B$ arrivi/servizi / min)