

AUTOMI A STATI STOCASTICI CON TEMPORIZZAZIONE esponenziale

$$(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, P, P_0, F)$$

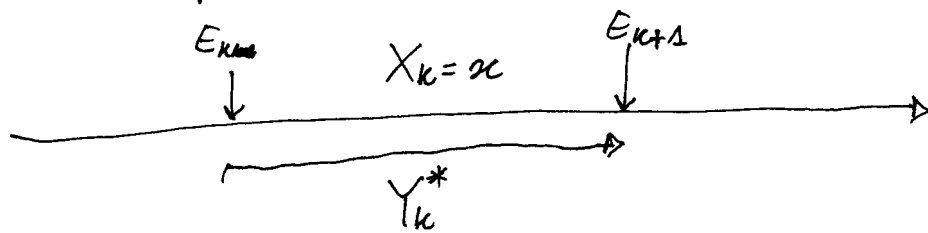
$$\mathcal{E} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$F = \{F_\lambda : \lambda \in \mathcal{E}\}$$

$$F_\lambda(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Le durate di vita residue sono distribuite
come le corrispondenti durate di vita totali

1. calcolo delle probabilità del tipo $P(Y_k^* \leq t | X_k = \alpha)$



Nota che $X_k = \alpha$,

$$Y_k^* = \min_{\lambda \in \Gamma(\alpha)} Y_{\lambda, k}$$

segno distrib. esp.

Sovrapposiz. di

v.o. esp. $\Rightarrow$ v.o. esp. con tasso $\Lambda(\alpha) = \sum_{\lambda \in \Gamma(\alpha)} \lambda$.

$$\Rightarrow P(Y_k^* \leq t | X_k = \alpha) = 1 - e^{-\Lambda(\alpha)t}, \quad t \geq 0$$

2. calcolo delle probabilità del tipo $P(E_{k+1}=i | X_k=n)$.

$$P(E_{k+1}=i | X_k=n) =$$

$$= P(Y_{i,k} \leq \min_{\substack{j \in \Gamma(n) \\ j \neq i}} Y_{j,k})$$

sovrapposiz. di v.e. esp.

$$\Rightarrow \text{v.e. esp con tasso } \Lambda_i(n) = \sum_{\substack{j \in \Gamma(n) \\ j \neq i}} \lambda_j = \Lambda(n) - \lambda_i$$

$$= 1 - \frac{\Lambda_i(n)}{\lambda_i + \Lambda_i(n)} = \frac{\lambda_i}{\Lambda(n)}$$

$$P(E_{k+1}=i | X_k=n) = \frac{\lambda_i}{\Lambda(n)}$$

$\forall i \in \Gamma(n)$

$$P(E_{k+1}=i | X_k=n) = 0 \text{ se } i \notin \Gamma(n)$$

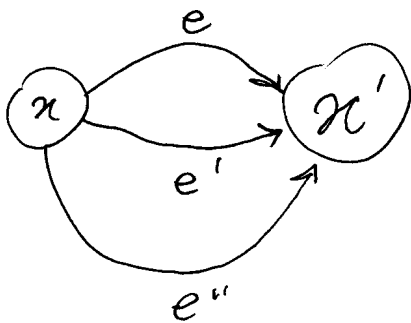
→ rivedere l'esempio con distribuz. ~~el~~iformi delle durate di vita

$$P(X \leq Y+t) = 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}$$

$\lambda \quad \mu$

3. calcolo delle probabilità del tipo $P(X_{k+1}=x' | X_k=x)$

$$P(X_{k+1}=x' | X_k=x) = \sum_{i \in \Gamma(x)} P(X_{k+1}=x' | X_k=x, E_{k+1}=i) P(E_{k+1}=i | X_k=x)$$



regola delle prob. totale

partizione dell'evento certo:

$$\{E_{k+1}=i \mid i \in \Gamma(x)\}$$

$$= \sum_{i \in \Gamma(x)} p(x' | x, i) \frac{\lambda_i}{\Lambda(x)}$$

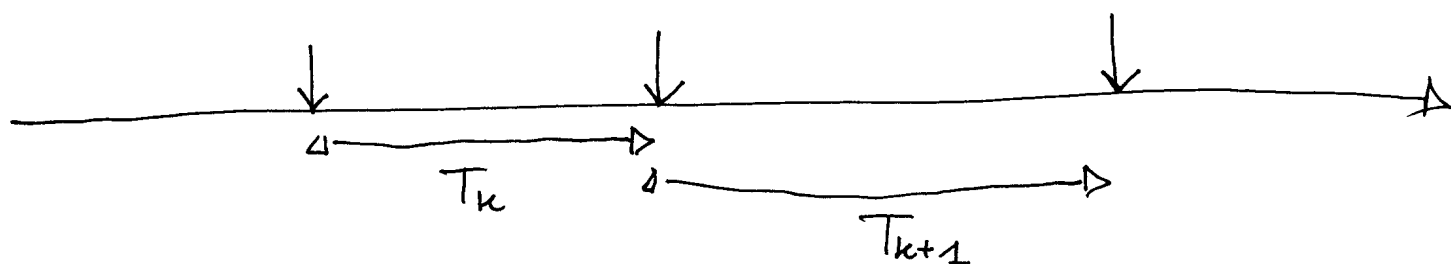
prob. di transizione
dello stato

(stato del problema)

$$P(X(t)=x) = ?$$

PROCESSI DI POISSON

Un Processo di Poisson è un processo di conteggio di eventi in cui gli intertempi tra due eventi consecutivi sono variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite con distribuzione esponenziale di tasso λ .



T_k e T_{k+1} sono indip. e distribuite esp. con tasso $\lambda > 0$.

Definiamo

$N(t)$ = il numero di occorrenze di eventi nell'intervallo $(0, t]$.

↓
v.e. discreta che può assumere i valori $\{0, 1, 2, \dots\}$.

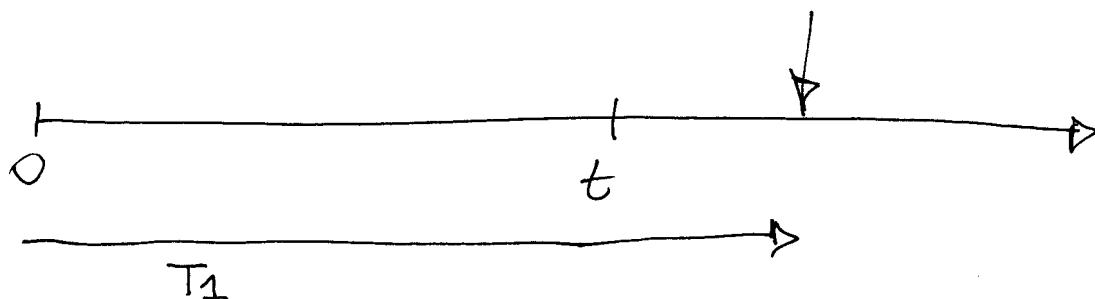
$$P(N(t)=n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

- distribuzione di Poisson con parametro λt -

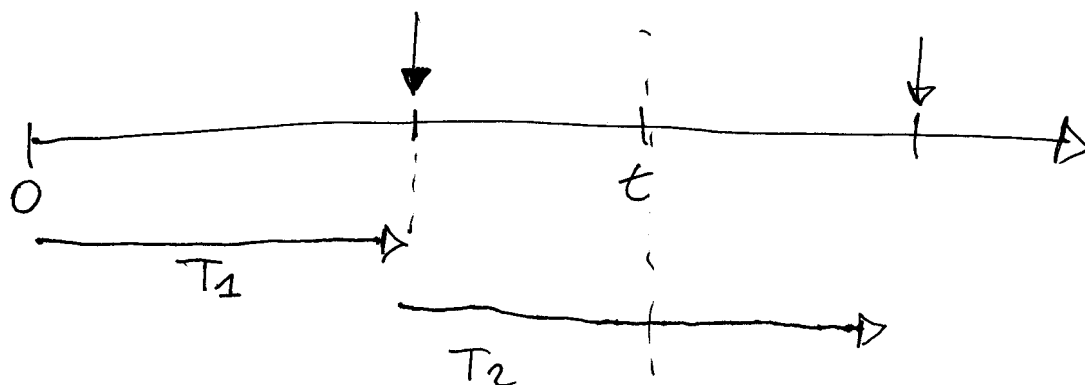
$$E[N(t)] = \lambda t$$

dim.

$$\bullet P(N(t)=0) = P(T_1 > t) = 1 - \underbrace{P(T_1 \leq t)}_{1 - e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda t}$$



$$\bullet P(N(t)=1) = P(T_1 \leq t, T_1 + T_2 > t)$$



$$= P((T_1, T_2) \in A_t) \quad \text{dove } A_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq t, x + y > t\}$$

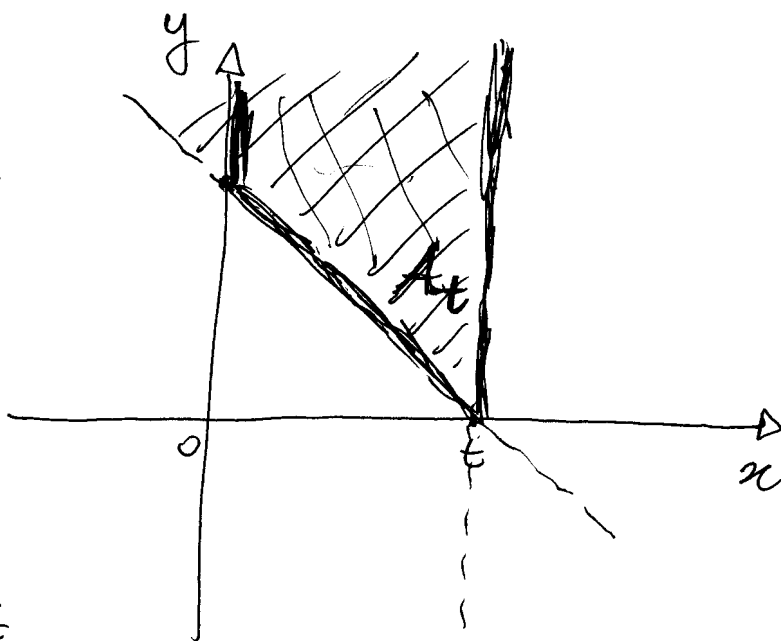
$$= \int_{0-x+t}^{t+\infty} \int_{0-x+t}^{t+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \cdot \lambda e^{-\lambda y} dx dy$$

$$= \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \left[-e^{-\lambda y} \right]_{-x+t}^{+\infty} dx$$

$$= \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} e^{-\lambda(-x+t)} dx$$

$$= \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} dx = \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t dx = (\lambda t) e^{-\lambda t}.$$

ecc. ecc. $\square$



ESERCIZIO (Es. 2 esame 08/01/2003)



durata di vita evento di arrivo di un pezzo: esp. con tasso

$$\lambda = \frac{1}{4} = 0.25 \text{ pezzi/min}$$

durata di vita evento di terminazione lavorazione: esp. con tasso

$$\mu = \frac{1}{2} = 0.5 \text{ pezzi/min}$$

probabilità pezzo difettoso: $p = \frac{1}{8}$.

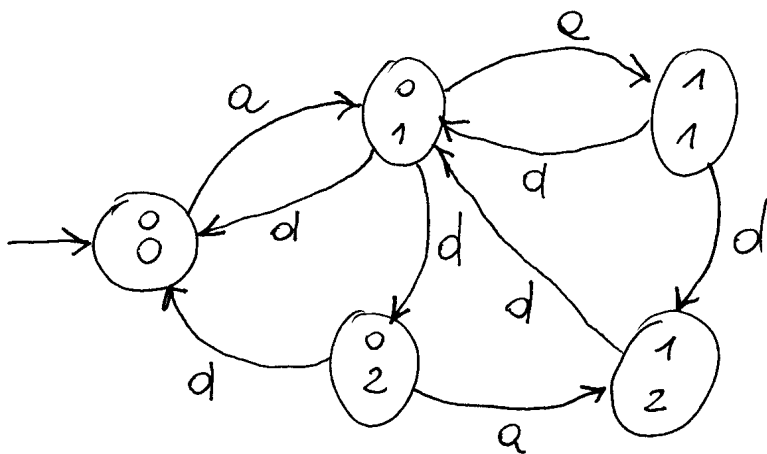
1) $(E, X, \Gamma, p, x_0, F)$

$E = \{a, d\}$
 $\nearrow$ termine di una lavorazione
 $\searrow$ arrivo di un pezzo

~~Definizione di stato:~~

Definizione di stato: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\rightarrow$ buffer: vuoto, occupato
 $\rightarrow$ macchina: libera, 1^a lavoraz., 2^a lavoraz.

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$



$$P\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, d\right) = 1-p$$

$$P\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, d\right) = p$$

$$P\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, d\right) = 1-p$$

$$P\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, d\right) = p$$

$$F = \{F_a, F_d\}$$

$$F_a(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0 \quad \lambda = 0.25$$

$$F_d(t) = 1 - e^{-\mu t}, \quad t \geq 0 \quad \mu = 0.5$$