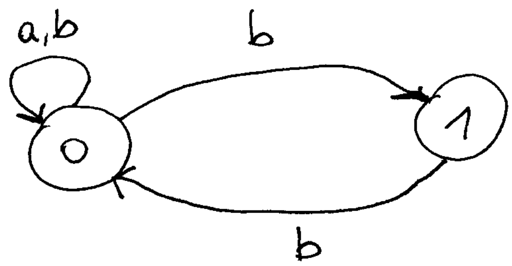
ESEMPIO



$$P(E_2=a) = \underbrace{P(E_2=a \mid X_1=0)}\,\underbrace{P(X_1=0)}_{\text{NOTA}} + \underbrace{P(E_2=a \mid X_1=1)}_{0}\,P(X_1=1)$$

$$P(Y_{a,1} \leq Y_{b,1} \mid X_1=0)$$

- $x_0=0,\ \underline{e_1=a,}\ x_1=0$: $\begin{cases} y_{a,1} = v_{a,2} \\ y_{b,1} = v_{b,1} - v_{a,1} \end{cases}$
- $x_0=0,\ \underline{e_1=b,}\ x_1=0$: $\begin{cases} y_{a,1} = v_{a,1} - v_{b,1} \\ y_{b,1} = v_{b,2} \end{cases}$
- $x_0=1,\ \underline{e_1=b,}\ x_1=0$: $\begin{cases} y_{a,1} = v_{a,1} \\ y_{b,1} = v_{b,2} \end{cases}$

$$\begin{aligned} P(E_2=a) = {} & P(E_2=a \mid X_0=0, E_1=a, X_1=0)\,P(X_1=0 \mid X_0=0, E_1=a)\,P(E_1=a \mid X_0=0)\,P(X_0=0) \\ & + P(E_2=a \mid X_0=0, E_1=b, X_1=0)\,P(X_1=0 \mid X_0=0, E_1=b)\,P(E_1=b \mid X_0=0)\,P(X_0=0) \\ & + P(E_2=a \mid X_0=1, E_1=b, X_1=0)\,P(X_1=0 \mid X_0=1, E_1=b)\,P(E_1=b \mid X_0=1)\,P(X_0=1) \end{aligned}$$

probabilità di transizione (DATI del problema)

calcolate

probabilità dello stato iniziale (DATI del problema)

$$P(E_2=a \mid X_0=0, E_1=a, X_1=0) =$$

$$= P(Y_{a,1} \le Y_{b,1} \mid X_0=0, E_1=a, X_1=0)$$

$$= P(V_{a,2} \le V_{b,1} - V_{a,1} \mid V_{a,1} \le V_{b,1})$$

$\Rightarrow$ richiede di calcolare un integrale in $\mathbb{R}^3$.

$$P(E_2=a \mid X_0=0, E_1=b, X_1=0)$$

$$= P(Y_{a,1} \le Y_{b,1} \mid X_0=0, E_1=b, X_1=0)$$

$$= P(V_{a,1} - V_{b,1} \le V_{b,2} \mid V_{b,1} \le V_{a,1})$$

$$P(E_2=a \mid X_0=1, E_1=b, X_1=0)$$

$$= P(Y_{a,1} \le Y_{b,1} \mid X_0=1, E_1=b, X_1=0)$$

$$= P(V_{a,1} \le V_{b,2})$$

<u>MORALE</u>: per calcolare probabilità del tipo $P(E_k=e)$ oppure $P(X_k=x)$ abbiamo bisogno di "portarci dietro" tutta la storia passata degli eventi e degli stati.

Questo serve per poter determinare le distribuzioni di probabilità delle <u>durate di vita residue</u>.

DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE

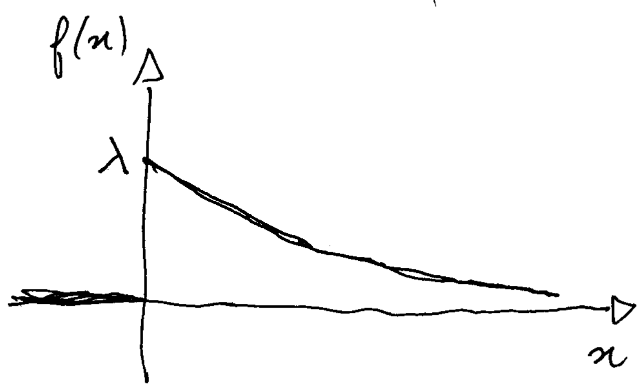
X variabile aleatoria

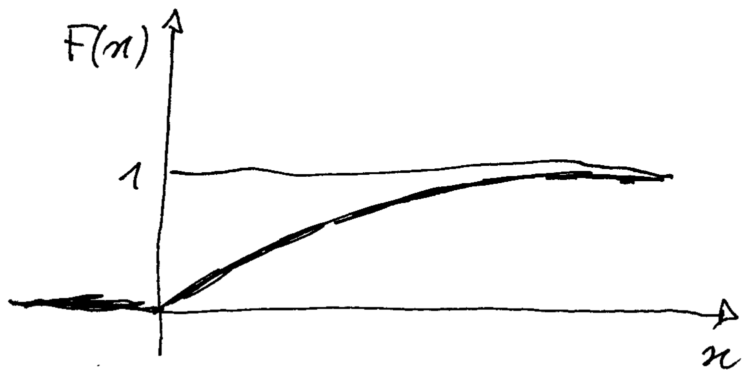
$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \forall x \geq 0$$ ← funzione di distribuzione esponenziale

λ: tasso della distribuzione $(\lambda > 0)$

densità di probabilità esponenziale:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{per } x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$





$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot x \, dx = \frac{1}{\lambda}$$

PROPRIETÀ

1. proprietà di mancanza di memoria $\quad t, s > 0$

$$P(X > t+s \mid X > t) = \frac{P(X > t+s, X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > t+s)}{P(X > t)} = \frac{1 - P(X \leq t+s)}{1 - P(X \leq t)}$$

$$= \frac{1-\left(1-e^{-\lambda(t+s)}\right)}{1-\left(1-e^{-\lambda t}\right)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(X>s)$$

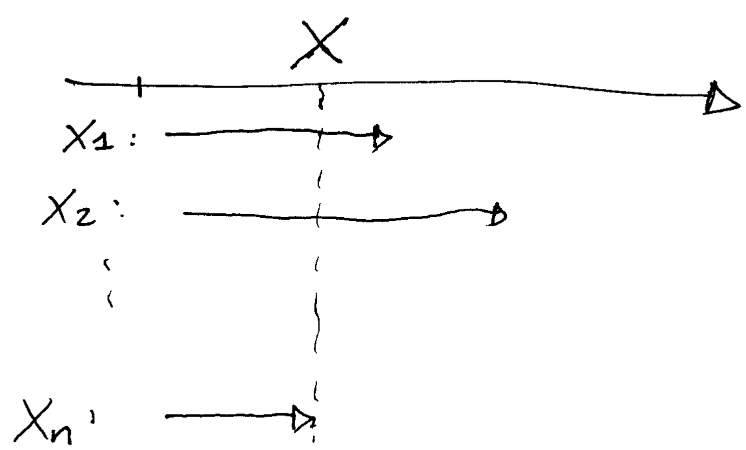
$$\boxed{P(X>t+s \mid X>t) = P(X>s)}$$

2. <u>sovrapposizione di variabili aleatorie esponenziali indipendenti</u>

v.a. esp. $X_1, X_2, \dots, X_n$

$$X_1 \to \lambda_1,\quad X_2 \to \lambda_2,\quad \dots,\quad X_n \to \lambda_n$$

qual è la distrib. di prob. della v.a. $X = \min\limits_{i=1,\dots,n} X_i$?



$$P(X \le x) = P\left(\min_{i=1,\dots,n} X_i \le x\right) = 1 - P\left(\min_{i=1,\dots,n} X_i > x\right)$$

$$= 1 - P(X_1 > x, X_2 > x, \dots, X_n > x)$$

$$= 1 - P(X_1 > x)\,P(X_2 > x) \dots P(X_n > x)$$

indipendenti

$$= 1 - e^{-\lambda_1 x} \cdot e^{-\lambda_2 x} \cdot \ldots \cdot e^{-\lambda_n x} = \underbrace{1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)x}}_{\text{distribuzione esponenziale.}}$$

$\Rightarrow X = \min_{i=1,\dots,n} X_i$ è ancora una v.a. esponenziale

con tasso $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$.

3. probabilità dell'evento $\{X \le Y+t\}$ con X, Y v.a. esponenziali indipendenti, e $t>0$.

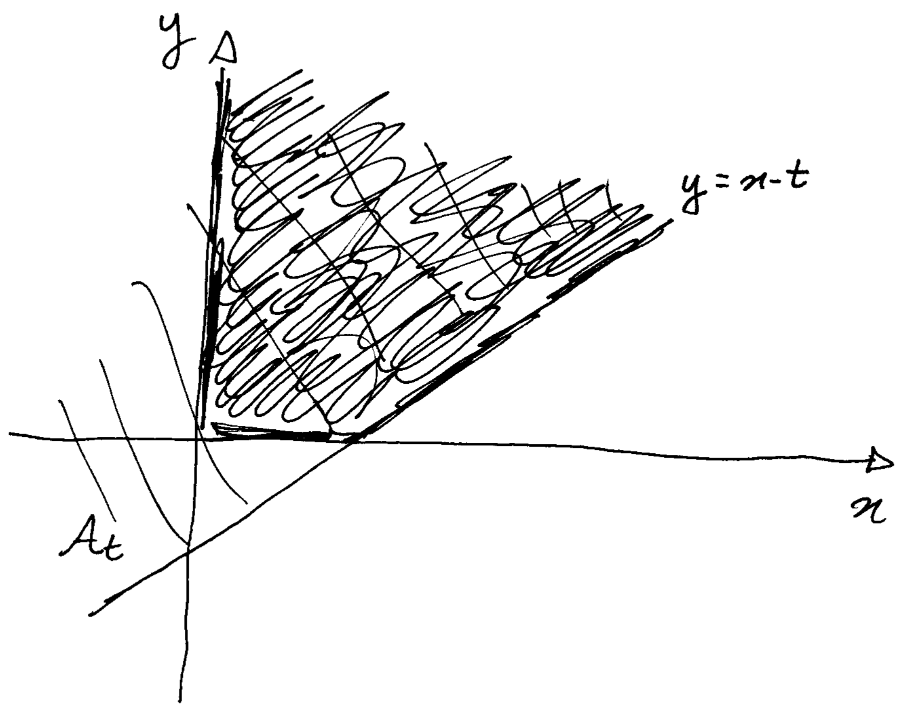
tassi: λ μ

$$P(X \le Y+t) = P((X,Y) \in A_t)$$

dove $A_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \le y+t\}$.

$$= \iint_{A_t} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

densità congiunta di X e Y



$$= \iint_{A_t} f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy$$

indipendenti

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{y+t} \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mu e^{-\mu y}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \mu e^{-\mu y} \left(\int_0^{y+t} \lambda e^{-\lambda x}\,dx \right) dy$$

$$= \int_0^{+\infty} \mu e^{-\mu y} \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^{y+t} dy$$

$$= \int_0^{+\infty} \mu e^{-\mu y} \cdot \left(1 - e^{-\lambda(y+t)}\right) dy$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\mu e^{-\mu y} - \mu e^{-\lambda t} e^{-(\lambda+\mu) y} \right) dy$$

$$= \left[-e^{-\mu y} + \frac{\mu e^{-\lambda t}}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu) y} \right]_0^{+\infty}$$

$$= 1 - \frac{\mu e^{-\lambda t}}{\lambda+\mu} .$$

4. <u>proprietà di mancanza di memoria "generale"</u>

v.a. X, Y esponenziali, indipendenti.

$\lambda \quad \mu$ $\quad \boxed{t \geq 0}$

$$\boxed{P(X>t+s \mid X>t) = P(X>s)}$$

$$P(X > Y+t \mid X > Y) =$$

$$= \frac{P(X>Y+t, X>Y)}{P(X>Y)} = \frac{P(X>Y+t)}{P(X>Y)} = \frac{1-P(X\leq Y+t)}{1-P(X\leq Y)}$$

$$= \frac{\frac{\mu e^{-\lambda t}}{\lambda+\mu}}{\frac{\mu}{\lambda+\mu}} = e^{-\lambda t} = P(X>t)$$

ovvero:

$$\boxed{P(X \leq Y+t \mid X > Y) = P(X \leq t)}$$

AUTOMI A STATI STOCASTICI CON TEMPORIZZAZIONE ESPONENZIALE

$(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, p, p_0, F)$

$\mathcal{E} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$F = \{F_i : i \in \mathcal{E}\}$

$F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}, \quad t \geq 0.$

RISULTATO FONDAMENTALE:

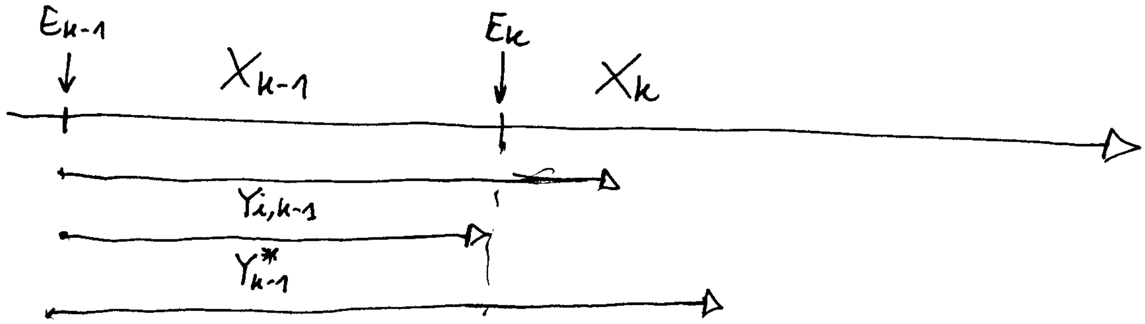
Tutte le durate di vita residue seguono le stesse distribuzioni di probabilità esponenziali delle corrispondenti durate di vita complessive.

inizializzazione

$Y_{i,0} = V_{i,1} \quad \forall i \in \Gamma(X_0)$ tutte esponenziali (dato del problema)

$Y_0^* = \min_{i \in \Gamma(X_0)} Y_{i,0}$ esponenziale induzione

ip. $Y_{i,k-1}$ esponenziale , Y^*_{k-1} esponenziale



due casi :

i) l'evento i viene attivato dopo l'accadimento di E_k :

$$Y_{i,k} = V_{i,N_{i,k}} \quad \text{esponenziale}$$

ii) l'evento i era possibile nello stato X_{k-1}, non è accaduto, e rimane possibile nel nuovo stato X_k.

$$Y_{i,k} = Y_{i,k-1} - Y^*_{k-1}$$

$$P(Y_{i,k} \leq t \mid Y_{i,k-1} - Y^*_{k-1} > 0)$$

$$= P(Y_{i,k-1} - Y^*_{k-1} \leq t \mid Y_{i,k-1} - Y^*_{k-1} > 0)$$

$$= P(Y_{i,k-1} \leq t)$$

$\square$