AUTOMI TEMPORIZZATI $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, f, x_0, V)$

Incertezza

f, x_0, V diventano:

probabilità di transizione $p(x'|x,e)$

probabilità dello stato iniziale $p_0(x)$

struttura di temporizzazione stocastica

AUTOMI STOCASTICI

$$V = \{ V_e : e \in \mathcal{E} \}$$

$$V_e = \{ V_{e,1}, V_{e,2}, V_{e,3}, \dots \}$$

Consideriamo le seguenti assunzioni semplificative:

i) Fissato $e \in \mathcal{E}$, tutte le durate di vita $V_{e,i}$ dell'evento e sono indipendenti e identicamente distribuite.

ii) Le durate di vita di eventi distinti sono indipendenti.

Conseguenze:

di i): fissato $e \in \mathcal{E}$, le variabili aleatorie $V_{e,i}$ seguono tutte la stessa distribuzione di probabilità che chiamiamo $F_e(\cdot)$:

$$F_e(t) = P(V_{e,i} \leq t) \quad \forall t.$$

<u>NOTA</u>: Le distribuzioni $F_e(\cdot)$ di interesse saranno solo quelle che sono <u>nulle</u> per $t \leq 0$.

di i) e ii): non è necessario specificare le <u>funzioni di distribuzione congiunte</u> di durate di vita diverse (sia relative allo stesso evento che relative a eventi differenti).

$\Rightarrow$ Sotto le assunzioni i) e ii), la struttura di temporizzazione stocastica è completamente specificata dall'insieme delle distribuzioni di probabilità sui singoli eventi:

$$F = \{F_e : e \in \mathcal{E}\}$$

dove:

$$F_e(t) = P(V_{e,i} \leq t) \quad \forall t.$$

Def. - Un <u>automa temporizzato stocastico</u> è una sestupla $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, p, p_0, F)$

dove:

- $\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma$ sappiamo cosa sono
- $p(x'|x,e)$ è la prob. di transizione dello stato
- $p_0(x)$ è la prob. dello stato iniziale
- F è una struttura di temporizzazione stocastica.

$$\longmapsto$$

$(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, f, x_0, V)$ $\qquad\qquad$ $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, p, p_0, F)$

$(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, f, p_0, V)$

$(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, p, x_0, F)$

...

Dato un automa stocastico, l'analisi della dinamica dell'automa è un esercizio di calcolo delle probabilità: Perchè?

Sono quantità aleatorie nell'automa stocastico:

- X_0, $\Gamma(X_0)$
- $Y_{e,0}$
- $N_{e,0}$

Posto $k = 1, 2, 3, \ldots$ il contatore del numero degli eventi:

- il k-esimo evento. E_k
- l'intertempo tra due eventi successivi Y^*_{k-1}
- lo stato dopo il k-esimo evento X_k, e di conseguenza $\Gamma(X_k)$
- le durate di vita residue degli eventi: $Y_{e,k}$
- i contatori di attivazione degli eventi: $N_{e,k}$

Le relazioni tra queste variabili aleatorie sono date dalla dinamica di temporizzazione degli eventi.

~

X

determinare la d.d.p. di $Y = h(X)$.

Regola della probabilità totale

Ω : evento certo

partizione di Ω: insieme di eventi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tali che:

$$i) \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$$

$$ii) \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

Se B è un evento,

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$$

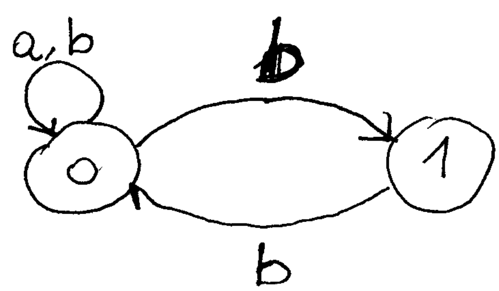
Nel caso in cui C sia un evento che condiziona:

$$P(B|C) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i, C)P(A_i|C)$$

ESEMPIO.

Automa a stati temporizzato stocastico $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, p, p_0, F)$

- $\mathcal{E} = \{a, b\}$
- $\mathcal{X} = \{0, 1\}$



- $p(0|0,b) = \frac{1}{4}$.

$\left[p(1|0,b) = 1 - p(0|0,b) = \frac{3}{4}\right]$

- $p_0(0) = \frac{2}{3}$.

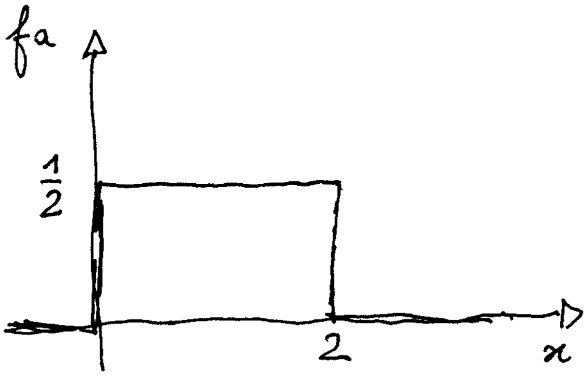
$\left[p_0(1) = 1 - p_0(0) = \frac{1}{3}\right]$

- $F = \{F_a, F_b\}$

dove:

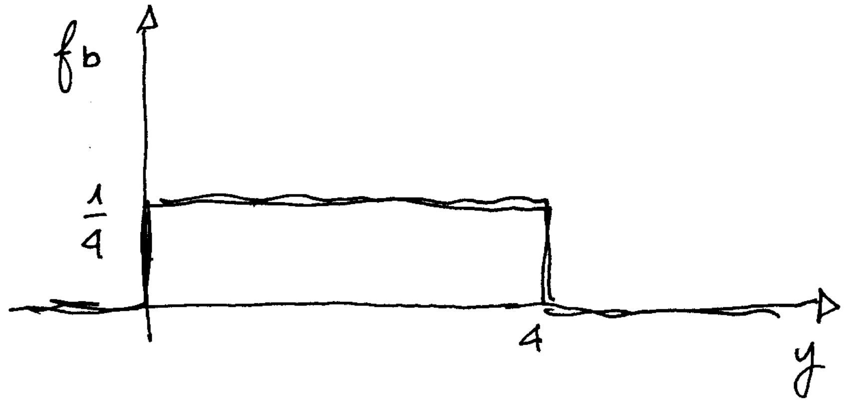
F_a è una distribuzione uniforme in $[0,2]$

F_b è una distribuzione uniforme in $[0,4]$.



densità di probabilità: $f_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

distribuzione di probabilità: $F_a(t) = \int_{-\infty}^{t} f_a(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \frac{1}{2}t & \text{se } 0 \le t \le 2 \\ 1 & \text{se } t > 2 \end{cases}$



densità di probabilità: $f_b(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{se } 0 \le y \le 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

distribuzione di probabilità $F_b(t) = \int_{-\infty}^{t} f_b(y)\,dy = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ \frac{1}{4}t & \text{se } 0 \le t \le 4 \\ 1 & \text{se } t > 4. \end{cases}$

$P(E_1 = a)$? $P(E_2 = b)$?

$P(X_1 = 0)$? $P(X_2 = 1)$?

$$P(E_1 = a) = P(E_1 = a \mid X_0 = 0)\,P(X_0 = 0) + \underbrace{P(E_1 = a \mid X_0 = 1)}_{= 0}\,P(X_0 = 1)$$

regola prob. totale: $A_1 = \{X_0 = 0\}$
$A_2 = \{X_0 = 1\}$

$$= \underbrace{P(E_1 = a \mid X_0 = 0)}_{?}\,\underbrace{P(X_0 = 0)}_{p_0(0) = \frac{2}{3}}$$

$$P(E_1=a)=\underbrace{P(E_1=a|X_0=0)}_{\frac{3}{4}}\underbrace{P(X_0=0)}_{\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}.$$

$$P(E_1=b)=1-P(E_1=a)=\frac{1}{2}.$$

$$P(X_1=0)=P(X_1=0|X_0=0)P(X_0=0)+P(X_1=0|X_0=1)P(X_0=1)$$

$$P(X_1=0|X_0=0)=P(X_1=0|X_0=0,E_1=a)P(E_1=a|X_0=0)$$
$$+P(X_1=0|X_0=0,E_1=b)P(E_1=b|X_0=0)$$

$$\left[P(B|C)=P(B|A_1,C)P(A_1|C)+P(B|A_2,C)P(A_2|C)\right]$$

$$=\underbrace{p(0|0,a)}_{=1}\underbrace{P(E_1=a|X_0=0)}_{\text{calcolata prima!}=\frac{3}{4}}+\underbrace{p(0|0,b)}_{=\frac{1}{4}}\underbrace{P(E_1=b|X_0=0)}_{1-P(E_1=a|X_0=0)=\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{13}{16}$$

$$P(X_1=0|X_0=1)=1$$

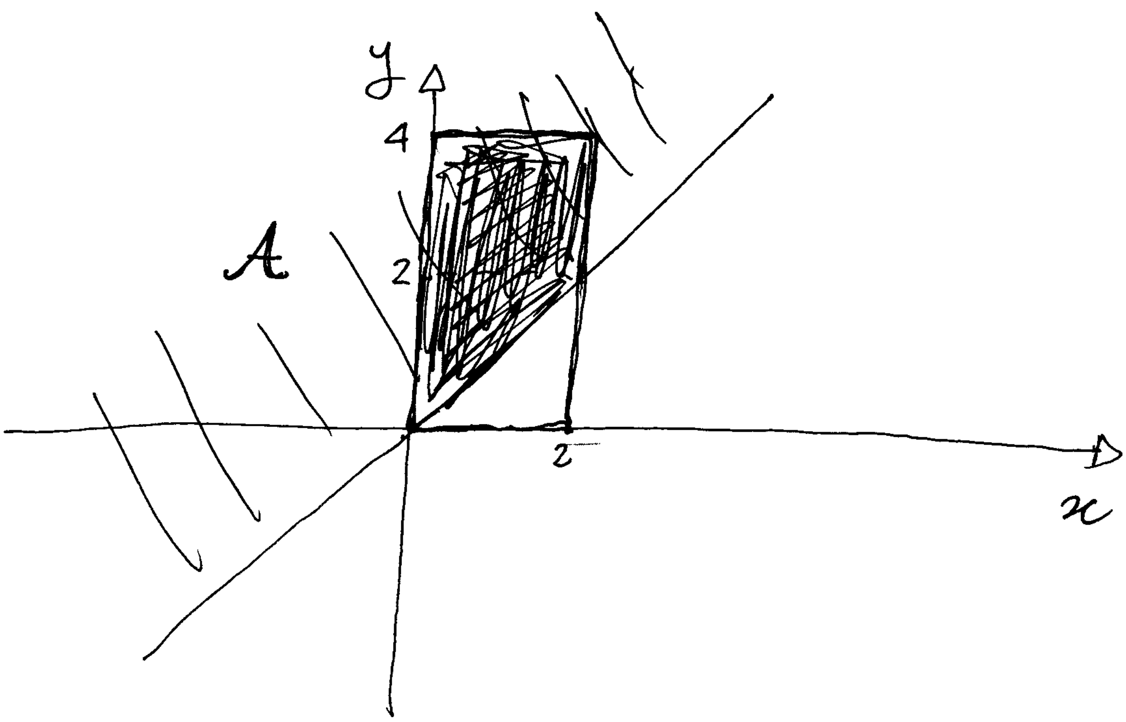
$$\Rightarrow P(X_1=0)=\frac{13}{16}\cdot\frac{2}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=\frac{7}{8}.$$

$$P(E_1 = a \mid X_0 = 0) = P(Y_{a,0} \le Y_{b,0} \mid X_0 = 0)$$

$$= P(V_{a,1} \le V_{b,1})$$

$$= P((V_{a,1}, V_{b,1}) \in \mathcal{A}) = \iint_{\mathcal{A}} f_a(x) f_b(y)\, dx\, dy$$

$$\mathcal{A} = \{(x,y) : x \le y\}$$



$$= \iint_{\text{trapezio}} \frac{1}{8}\, dx\, dy = \frac{1}{8} \iint_{\text{trapezio}} dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{8} \text{AREA}(\text{trapezio}) = \frac{1}{8} \frac{6 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(E_1 = a \mid X_0 = 0) = \frac{3}{4}}$$

$$P(E_2 = a) = ?$$

$$P(E_2 = a) = P(E_2 = a \mid X_1 = 0)\,\underbrace{P(X_1 = 0)}_{\text{NOTA}} + P(E_2 = a \mid X_1 = 1)\,\underbrace{P(X_1 = 1)}_{\text{NOTA}}$$

$$\underline{P(E_2 = a \mid X_1 = 0)} = P(\underline{Y_{a,2} \leq Y_{b,1}} \mid X_1 = 0)$$