$(\mathcal{E}, \mathcal{X}, f, x_0, \mathcal{F})$

$\mathcal{X} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

Per ogni $x' \in \mathcal{X}$ definiamo

$$\Delta(x') = \{ (x,e) : x \in \mathcal{X}, e \in \mathcal{E}, f(x,e) = x' \}$$

Indichiamo con α_i l'ER riconosciuta nello stato x_i, $i=0,1,\dots,n$.

$$(*) \begin{cases} \alpha_0 = \varepsilon + \displaystyle\sum_{(x_j,e) \in \Delta(x_0)} \alpha_j e \\ \alpha_i = \displaystyle\sum_{(x_j,e) \in \Delta(x_i)} \alpha_j e \quad , i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

$$\alpha = \sum_{x_i \in \mathcal{F}} \alpha_i$$

REGOLE PER RISOLVERE IL SISTEMA $(*)$:

i) $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n = \mathcal{E}^*$

Siano α, β e γ tre E.R. Allora:

ii) $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$

$(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$

proprietà distributiva della concatenazione rispetto all'unione

iii) $\alpha = \varepsilon\alpha = \alpha\varepsilon$ elemento neutro della concatenazione

iv) $\alpha\alpha^* = \alpha^*\alpha$

v) $\alpha^* = \varepsilon + \alpha\alpha^* = \varepsilon + \alpha^*\alpha$

vi) Sia α un ER <u>incognita</u>, e siano β, γ sono due ER <u>note</u>. Allora la soluzione del sistema

$$\alpha = \beta + \alpha\gamma$$

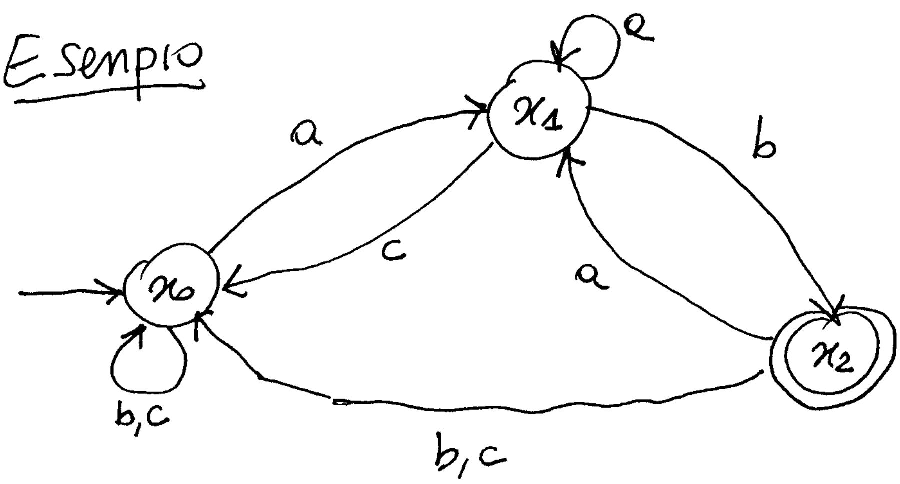
è data da

$$\boxed{\alpha = \beta\gamma^*.}$$

<u>dim.ne</u> - $\alpha = \beta + \alpha\gamma = \beta + \beta\gamma^*\gamma = \beta(\varepsilon + \gamma^*\gamma) = \beta\gamma^*$. $\square$

sostituire $\alpha = \beta\gamma^*$

<u>Esempio</u>



$X = \{x_0, x_1, x_2\}$

$\Sigma = \{a, b, c\}$.

$\Rightarrow$ ci aspettiamo che ~~il l'ER riconosca~~ il linguaggio accettato dall'automa sia costituito da tutte le stringhe sull'alfabeto Σ che terminano con "ab".

$\Downarrow$

$$\alpha = (a+b+c)^* ab$$

ab, aab, bab, cab, aaab, abab, acab, baab, bbab, bcab, caab, cbab, ccab, ...

3

$$
\begin{cases}
\alpha_0 = \varepsilon + \alpha_0 b + \alpha_0 c + \alpha_1 c + \alpha_2 b + \alpha_2 c \\
\quad = \varepsilon + \alpha_0 (b+c) + \alpha_1 c + \alpha_2 (b+c) \\
\alpha_1 = \alpha_0 a + \alpha_1 a + \alpha_2 a \\
\quad = (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) a \\
\alpha_2 = \alpha_1 b
\end{cases}
\Rightarrow \boxed{\alpha = \alpha_2}
$$

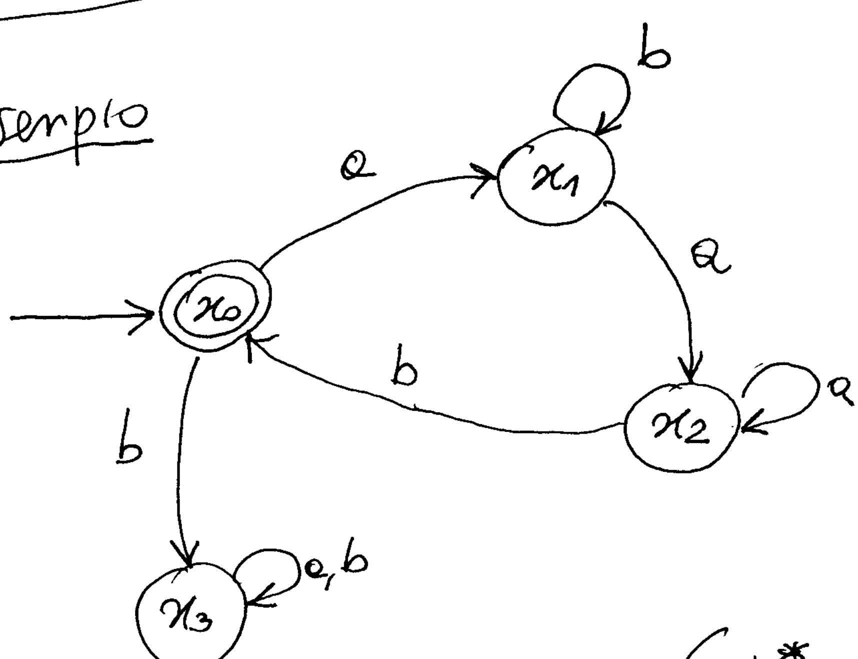
Utilizzando il fatto che $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = (a+b+c)^*$, otteniamo:

$$\alpha_1 = (a+b+c)^* a$$

e quindi

$$\alpha_2 = \boxed{(a+b+c)^* ab = \alpha}$$

Esempio



$X = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$

$\Sigma = \{a, b\}$.

ε

a

$$\alpha = (ab^* a a^* b)^*$$

$$\begin{cases} \alpha_0 = \varepsilon + \alpha_2 b \\ \alpha_1 = \alpha_0 a + \alpha_1 b \\ \boxed{\alpha_2 = \alpha_1 a + \alpha_2 a} \end{cases}$$

$\alpha = \alpha_0$

$\alpha = \beta + \alpha\gamma \Rightarrow \alpha = \beta\gamma^*$

dove

$\alpha = \alpha_2$

$\beta = \alpha_1 a$

$\gamma = a.$

$\alpha_2 = \alpha_1 a a^*$ (regola vi) applicata alla 3ª eq.ne).

Sostituiamo:

$$\alpha_0 = \varepsilon + \alpha_1 a a^* b$$

$$\boxed{\alpha_1 = \alpha_0 a + \alpha_1 b}$$

$\alpha = \beta + \alpha\gamma \Rightarrow \alpha = \beta\gamma^*$

dove

$\alpha = \alpha_1$

$\beta = \alpha_0 a$

$\gamma = b$

$\alpha_1 = \alpha_0 a b^*$

Sostituire

$$\boxed{\alpha_0 = \varepsilon + \alpha_0 a b^* a a^* b}$$

$\alpha = \beta + \alpha\gamma \Rightarrow \alpha = \beta\gamma^*$

dove

$\alpha = \alpha_0$

$\beta = \varepsilon$

$\gamma = ab^*aa^*b$ □

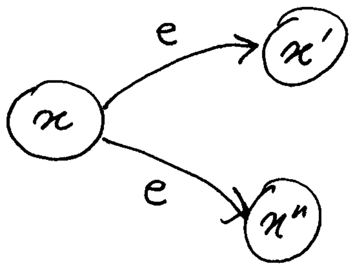
$$\alpha_0 = \boxed{(ab^*aa^*b)^* = \alpha}$$

AUTOMI A STATI FINITI NON DETERMINISTICI

Perchè $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, f, x_0, \mathcal{F})$ è deterministico?

f è una funzione!!

non può succedere

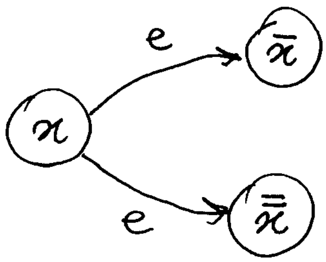


Def Un automa a stati finiti non deterministico (AFN) è una quintupla $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Delta, x_0, \mathcal{F})$ dove:

- $\mathcal{E}$ è un insieme finito di simboli/eventi
- $\mathcal{X}$ è un insieme finito di stati.
- $\Delta \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{E}_\varepsilon \times \mathcal{X}$ è la relazione di transizione,

dove $\mathcal{E}_\varepsilon = \{\varepsilon\} \cup \mathcal{E}$.

$\Rightarrow$ Se $(x, e, \bar{x}) \in \Delta$, allora partendo da x possiamo arrivare in $\bar{x}$ seguendo una transizione etichettata con e.



$(x, e, \bar{x}) \in \Delta$

non determinismo

$(x, e, \bar{\bar{x}}) \in \Delta$

- $x_0 \in X$ è lo stato iniziale
- $F \subseteq X$ è l'insieme degli stati finali.

OSSERVAZIONE - Gli automi a stati finiti deterministici (AFD) sono un caso particolare degli AFN, che si ottiene nel caso in cui Δ sia una funzione, e cioè:

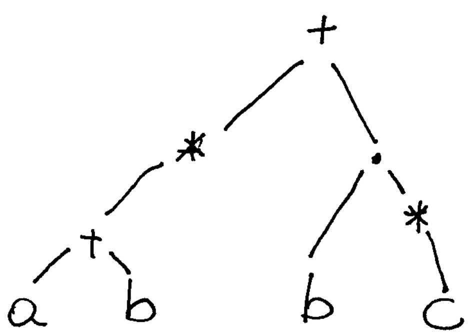
$$\boxed{\begin{array}{c} (x,e,\bar{x}) \in \Delta \quad e \quad (x,e,\bar{\bar{x}}) \in \Delta \\ \Downarrow \\ \bar{x} = \bar{\bar{x}} \end{array}} \qquad \forall x, \forall e, \forall \bar{x}, \bar{\bar{x}}.$$

AUTOMA A STATI FINITI EQUIVALENTE A UNA DATA ER

idea: approccio modulare, come quello seguito per definire le ER

(ER atomiche + operazioni su ER [unione, concatenazione, chiusura di Kleene].

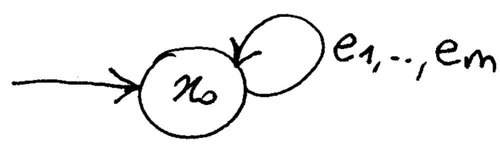
esempio - $(a+b)^* + bc^*$



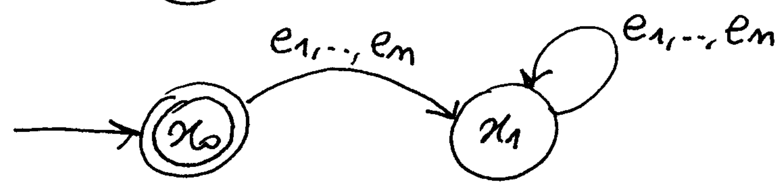
Proposizione: Se α è un'ER atomica, allora esiste un ~~automa~~ AFD (quindi anche un AFN) equivalente ad α.

dimostrazione costruttiva - $\mathcal{E}=\{e_1,..,e_m\}$ alfabeto

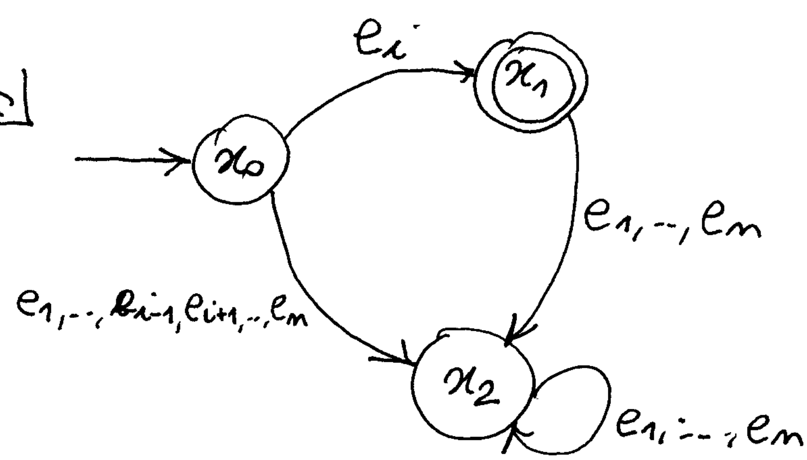
i) $\alpha=\emptyset \Rightarrow$



ii) $\alpha=\varepsilon \Rightarrow$



iii) $\alpha=e_i \Rightarrow$



$\square$

Proposizione - Dati due AFN G' e G'' sull'alfabeto $\mathcal{E}$, equivalenti rispettivamente alle ER α' e α'', esiste un AFN che è equivalente all'ER $\alpha=\alpha'+\alpha''$. (unione)

dim.ne costruttiva

Siano $G'=\{\mathcal{E},X',\Delta',x_0',\mathcal{F}'\}$ e $G''=\{\mathcal{E},X'',\Delta'',x_0'',\mathcal{F}''\}$.

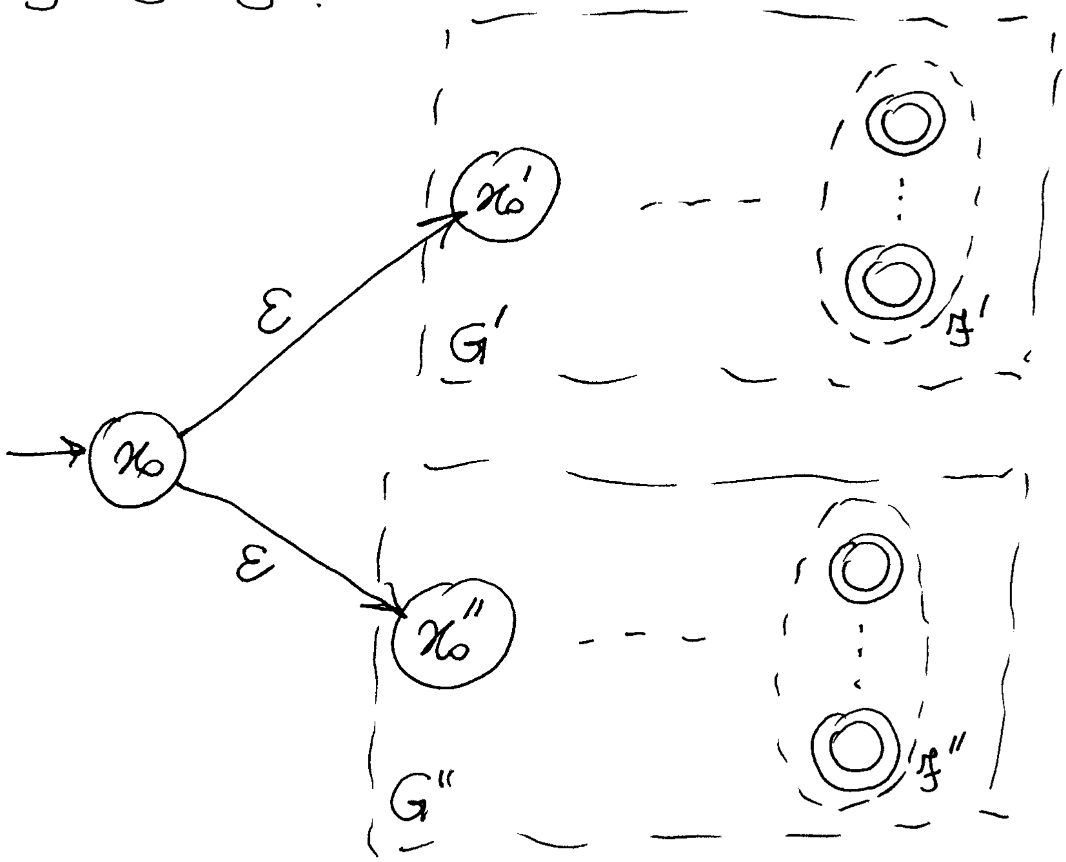
Allora $G=\{\mathcal{E},X,\Delta,x_0,\mathcal{F}\}$ dove:

- $\mathcal{X} = \{x_0\} \cup \mathcal{X}' \cup \mathcal{X}''$

  dove x_0 (stato iniziale di G) è un <u>nuovo stato</u> che non appartiene né a $\mathcal{X}'$ né a $\mathcal{X}''$.

- $\Delta = \Delta' \cup \Delta'' \cup \{(x_0, \varepsilon, x_0'), (x_0, \varepsilon, x_0'')\}$

- $\mathcal{F} = \mathcal{F}' \cup \mathcal{F}''$.



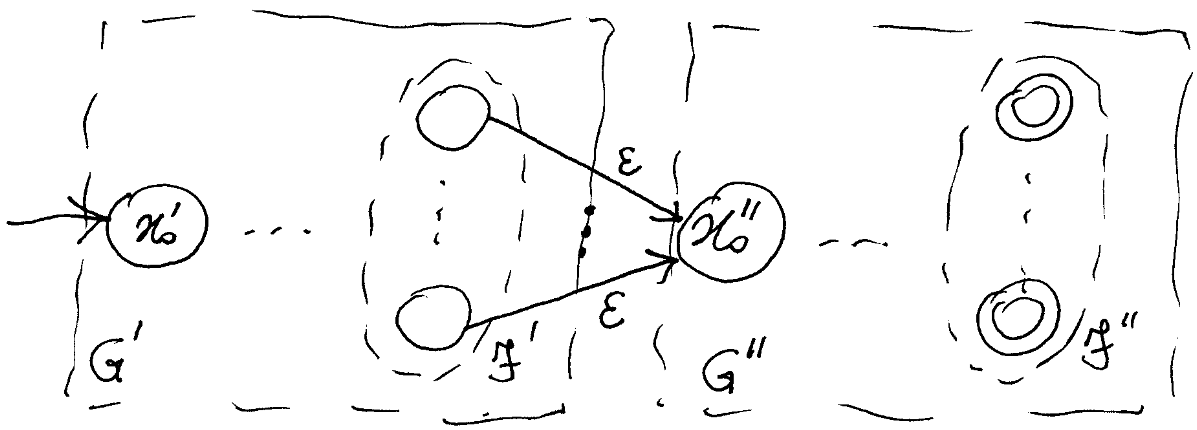
<u>Proposizione</u> - Dati due AFN G' e G'' sull'alfabeto $\mathcal{E}$, equivalenti rispettivamente alle ER α' e α'', esiste un AFN che è equivalente all'ER $\alpha = \alpha'\alpha''$ (<u>CONCATENAZIONE</u>)

dim.ne <u>costruttiva</u> -

$G' = \{\mathcal{E}, \mathcal{X}', \Delta', x_0', \mathcal{F}'\}$ $\qquad$ $G'' = \{\mathcal{E}, \mathcal{X}'', \Delta'', x_0'', \mathcal{F}''\}$

$\Rightarrow G = \{\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Delta, x_0, \mathcal{F}\}$ dove:

- $\mathcal{X} = \mathcal{X}' \cup \mathcal{X}''$
- $\Delta = \Delta' \cup \Delta'' \cup \{(x', \varepsilon, x_0'') \mid x' \in \mathcal{F}'\}$
- $x_0 = x_0'$
- $\mathcal{F} = \mathcal{F}''$.



$\square$