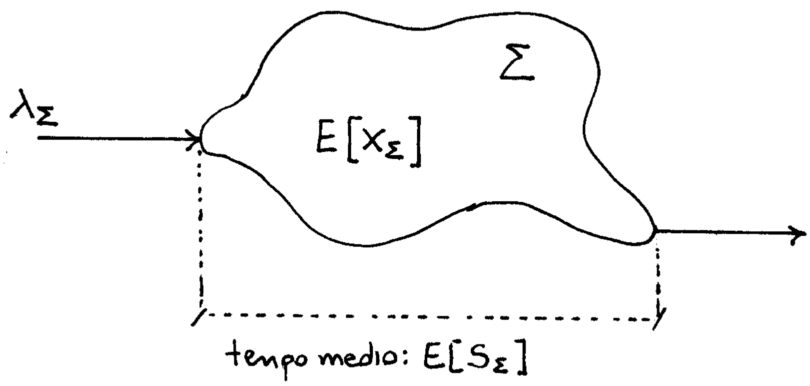
Legge di Little

Si consideri una rete di code, e si tracci una curva chiusa che racchiuda parte o tutta la rete. Si chiami Σ la parte di rete racchiusa all'interno della curva chiusa e, supponendo l'esistenza della situazione di equilibrio stocastico (regime), si indichi con:

- λ_Σ : la frequenza media degli arrivi effettivi di clienti in Σ;
- $E[S_\Sigma]$: il tempo di soggiorno medio di un cliente in Σ;
- $E[X_\Sigma]$: il numero totale medio di clienti in Σ.



Allora vale la relazione:

$$\boxed{E[X_\Sigma] = \lambda_\Sigma E[S_\Sigma]}$$

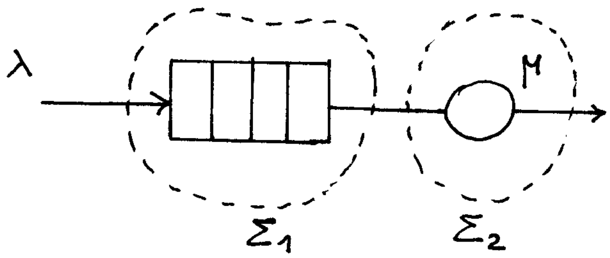
OSSERVAZIONI:

i) La Legge di Little è indipendente dai modelli stocastici degli arrivi e dei servizi nel sistema, sotto l'ipotesi che esista la condizione di regime

ii) La Legge di Little è indipendente dalle politiche di servizio impiegate nel sistema di code considerato.

iii) La Legge di Little è valida per configurazioni arbitrarie di spazi di accodamento e serventi interconnessi;

ESEMPIO: coda di servizio $G/G/1/K$



λ: Frequenza media degli arrivi

μ: frequenza media dei servizi in condizioni di pieno utilizzo del servente.

Ipotizziamo l'esistenza della situazione a regime.

Applicando la Legge di Little a Σ_1 abbiamo:

$\lambda_{\Sigma_1} = \lambda(1-\pi_K) \equiv$ frequenza media degli arrivi effettivi nella coda di servizio

$E[S_{\Sigma_1}] = E[W] \equiv$ tempo di attesa medio di un cliente

$E[X_{\Sigma_1}] \equiv$ numero medio di clienti nello spazio di accodamento

NOTA: Si osservi che $X_{\Sigma_1} = \max\{0, X-1\}$ con X il numero di clienti totale

Quindi $X_{\Sigma_1} \in \{0, 1, .., K-1\}$.

Applicando la Legge di Little a Σ_2 abbiamo:

$\lambda_{\Sigma_2} = \lambda_{\Sigma_1} = \lambda(1-\pi_K)$ NOTA - Si ricordi la condizione di bilanciamento dei flussi a regime!

$E[S_{\Sigma_2}] = E[Z] = \dfrac{1}{\mu} \equiv$ tempo di servizio medio di un cliente

$E[X_{\Sigma_2}] \equiv$ numero medio di clienti in servizio

NOTA: Si osservi che $X_{\Sigma_2} = \min\{1, X\}$ con X il numero di clienti totale.

Quindi $X_{\Sigma_2} \in \{0, 1\}$.

Volendo verificare la Legge di Little nel caso di Σ_2, osserviamo che

$$E[X_{\Sigma_2}] = 0\cdot\pi_0 + 1\cdot(\pi_1 + .. + \pi_K) = 0\cdot\pi_0 + 1\cdot(1-\pi_0) = 1-\pi_0$$

$$\Rightarrow \frac{E[X_{\Sigma_2}]}{E[S_{\Sigma_2}]} = \frac{1-\pi_0}{\frac{1}{\mu}} = \mu(1-\pi_0) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{condizione di bilanciamento a regime}}}{=} \lambda(1-\pi_K) = \lambda_{\Sigma_2}.$$

Proprietà PASTA (Poisson Arrival See Time Averages)

Consideriamo una coda di servizio, e definiamo gli eventi probabilistici:

$$A_n(t) = \{\text{il cliente che arriva all'istante } t \text{ trova } X(t)=n\}$$

$$B_n(t) = \{X(t)=n\}$$

Definiamo inoltre le probabilità $\alpha_n(t) = P(A_n(t))$ e $\pi_n(t) = P(B_n(t))$.

NOTA: $A_n(t)$ e $B_n(t)$ sono eventi diversi: nel caso di $A_n(t)$, l'osservazione dello stato del sistema avviene in specifici istanti di tempo determinati dal processo di arrivo. In generale, quindi, $\alpha_n(t) \neq \pi_n(t)$. A meno che...

TEOREMA (Proprietà PASTA)

Per una coda di servizio con processo di arrivo di Poisson, processi di servizio generici, e processi di arrivo e servizio indipendenti, si ha:

$$\alpha_n(t) = \pi_n(t) \quad \forall n, \forall t$$

Inoltre, se esistono le probabilità stazionarie $\alpha_n = \lim_{t\to\infty} \alpha_n(t)$ e $\pi_n = \lim_{t\to\infty} \pi_n(t)$, si ha:

$$\alpha_n = \pi_n \quad \forall n.$$

Code di servizio Markoviane

Sono code di servizio in cui le distribuzioni di probabilità dei tempi di interarrivo e dei tempi di servizio sono <u>esponenziali</u>.

coda di servizio Markoviana

$\Downarrow$

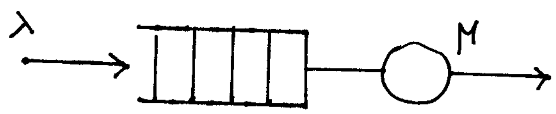
automa a stati stocastico con temporizzazione di Poisson

$\Downarrow$

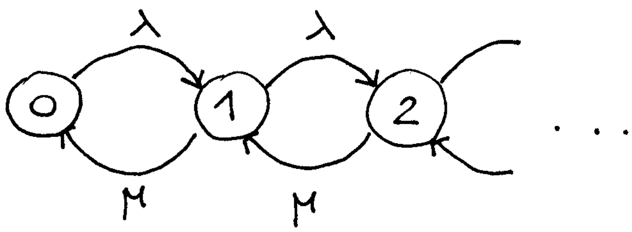
catena di Markov

$\leadsto$ Possiamo utilizzare i risultati sulle probabilità stazionarie noti per le catene di Markov!

CODA DI SERVIZIO M/M/1



STATO: lunghezza della coda



$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \cdots \\ 0 & 0 & \mu & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Condizione di esistenza della situazione di regime:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

Sotto la condizione $\rho<1$, procediamo al calcolo della distribuzione stazionaria risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \Pi Q = 0 & \text{con } \Pi = [\pi_0 \ \pi_1 \ \pi_2 \ \dots] \\ \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 = 0 \\ \lambda\pi_0 - (\lambda+\mu)\pi_1 + \mu\pi_2 = 0 \\ \lambda\pi_1 - (\lambda+\mu)\pi_2 + \mu\pi_3 = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 = 0 \\ -\lambda\pi_1 + \mu\pi_2 = 0 \quad \text{sommando l'eq. 1 all'eq. 2} \\ \lambda\pi_1 - (\lambda+\mu)\pi_2 + \mu\pi_3 = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1 \end{cases}$$

Proseguendo analogamente con le altre righe si ottiene:

$$\begin{cases} -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 = 0 & \implies \pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_0 \\ -\lambda\pi_1 + \mu\pi_2 = 0 & \implies \pi_2 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\pi_0 \\ -\lambda\pi_2 + \mu\pi_3 = 0 & \implies \pi_3 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3\pi_0 \\ \vdots & \qquad \vdots \\ \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1 \end{cases}$$

In generale: $\pi_i = \rho^i \pi_0$, $i=0,1,2,\dots$ Sostituiamo nell'ultima equazione:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \pi_0 = \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i\right)}_{\substack{\text{serie geometrica,} \\ \text{converge perché } \rho<1}} \pi_0 = \frac{1}{1-\rho}\pi_0$$

$\implies \frac{1}{1-\rho}\pi_0 = 1 \implies \pi_0 = 1-\rho$. In generale, $\boxed{\pi_i = \rho^i(1-\rho) \quad i=0,1,2,\dots}$.

utilizzazione: $U = 1 - \Pi_0 = 1 - (1-\rho) = \rho$.

$$E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pi_i = \sum_{i=1}^{\infty} i \rho^i (1-\rho) = \rho(1-\rho) \sum_{i=1}^{\infty} i \rho^{i-1}$$

$$= \rho(1-\rho) \frac{d}{d\rho}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i\right) = \rho(1-\rho) \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = \rho(1-\rho) \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho}$$

Applicando la Legge di Little:

$$E[S] = \frac{1}{\lambda} E[X] = \frac{1}{\lambda} \frac{\rho}{1-\rho}$$

coda di lunghezza infinita,
tutti gli arrivi sono accettati

$$E[W] = E[S] - E[Z] = \frac{1}{\lambda} \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{1-\rho} - 1\right) = \frac{1}{\mu} \frac{\rho}{1-\rho}$$

Per la coda M/M/1, la condizione di bilanciamento dei flussi a regime è data da:

$$\boxed{\lambda = \mu(1-\Pi_0)}$$

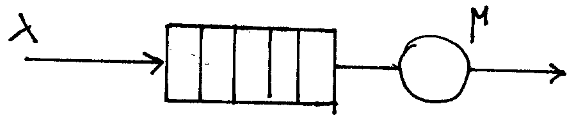
Infatti, $\mu(1-\Pi_0) = \mu\rho = \mu \cdot \frac{\lambda}{\mu} = \lambda$.

Qual è la probabilità a regime che un cliente che arriva si debba accodare?

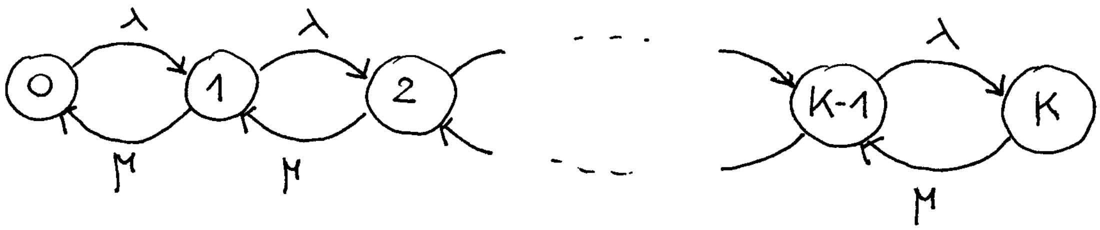
Per la proprietà PASTA:

$$P(X \geq 1) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pi_i = 1 - \Pi_0 = \rho.$$

CODA DI SERVIZIO M/M/1/K



STATO: lunghezza della coda



$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots & & \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & & \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda & \\ \vdots & & & \ddots & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ & & & & \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

Calcoliamo la distribuzione stazionaria definendo $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ e risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \pi Q = 0 \qquad \text{dove } \pi = [\pi_0 \; \pi_1 \; \ldots \; \pi_K] \\ \sum_{i=0}^{K} \pi_i = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 = 0 \\ \lambda\pi_0 - (\lambda+\mu)\pi_1 + \mu\pi_2 = 0 \\ \vdots \\ \lambda\pi_{K-2} - (\lambda+\mu)\pi_{K-1} + \mu\pi_K = 0 \\ \lambda\pi_{K-1} - \mu\pi_K = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \ldots + \pi_K = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 = 0 \\ -\lambda\pi_1 + \mu\pi_2 = 0 \\ \vdots \\ -\lambda\pi_{K-1} + \mu\pi_K = 0 \\ \cancel{\lambda\pi_{K-1} - \mu\pi_K = 0} \quad \text{ridondante} \\ \pi_0 + \pi_1 + \ldots + \pi_K = 1 \end{cases}$$

combinazioni delle righe analoghe al caso M/M/1

$$\begin{cases} \pi_1 = \dfrac{\lambda}{\mu}\pi_0 \\ \pi_2 = \dfrac{\lambda}{\mu}\pi_1 = \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^2 \pi_0 \\ \vdots \\ \pi_K = \dfrac{\lambda}{\mu}\pi_{K-1} = \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^K \pi_0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \ldots + \pi_K = 1 \end{cases}$$

In generale: $\pi_i = \rho^i \pi_0$, $i = 0, 1, \ldots, K$. Sostituiamo nell'ultima equazione:

$$\sum_{i=0}^{K} \rho^i \pi_0 = \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{K} \rho^i\right)}_{\text{somma geometrica}} \pi_0 = \frac{1-\rho^{K+1}}{1-\rho}\pi_0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1-\rho^{K+1}}{1-\rho}\pi_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \pi_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}.$$ In generale: $\boxed{\pi_i = \rho^i \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \quad i = 0, 1, \ldots, K}$

<u>utilizzazione</u>: $U = 1 - \pi_0 = 1 - \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} = \dfrac{\rho - \rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}} = \rho \dfrac{1-\rho^K}{1-\rho^{K+1}}$.

$$E[X] = \sum_{i=0}^{K} i \cdot \pi_i = \sum_{i=1}^{K} i \rho^i \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \sum_{i=1}^{K} i \rho^i$$

Posto $S_K = \sum_{i=1}^{K} i \rho^i = \rho + 2\rho^2 + \ldots + K\rho^K$, abbiamo che $\rho S_K = \rho^2 + 2\rho^3 + \ldots + K\rho^{K+1}$

e quindi: $S_K - \rho S_K = \rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots + \rho^K - K\rho^{K+1}$

$$= \sum_{i=0}^{K} \rho^i - K\rho^{K+1} - 1$$

somma geometrica

$$= \frac{1-\rho^{K+1}}{1-\rho} - K\rho^{K+1} - 1 = \frac{\rho - \rho^{K+1}}{1-\rho} - K\rho^{K+1}$$

In definitiva:

$$S_K = \frac{\rho}{1-\rho}\left(\frac{1-\rho^K}{1-\rho} - K\rho^K\right)$$

$$\Rightarrow E[X] = \frac{\rho}{1-\rho^{K+1}}\left(\frac{1-\rho^K}{1-\rho} - K\rho^K\right)$$

Applicando la Legge di Little:

$$E[S] = \frac{1}{\lambda_{eff}} E[X] = \frac{E[X]}{\lambda(1-\pi_K)} \quad , \quad E[W] = E[S] - E[Z] = = E[S] - \frac{1}{\mu} \text{ , ecc.}$$

coda di lunghezza finita,
gli arrivi sono scartati quando
la coda è piena.

Per la coda M/M/1/K la condizione di bilanciamento dei flussi a regime è data da:

$$\boxed{\lambda(1-\pi_K) = \mu(1-\pi_0)}$$

Infatti, $\lambda(1-\pi_K) = \lambda\left(1-\rho^K \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\right) = \lambda \cdot \frac{1-\cancel{\rho^{K+1}} - \rho^K + \cancel{\rho^{K+1}}}{1-\rho^{K+1}} = \lambda \frac{1-\rho^K}{1-\rho^{K+1}}$

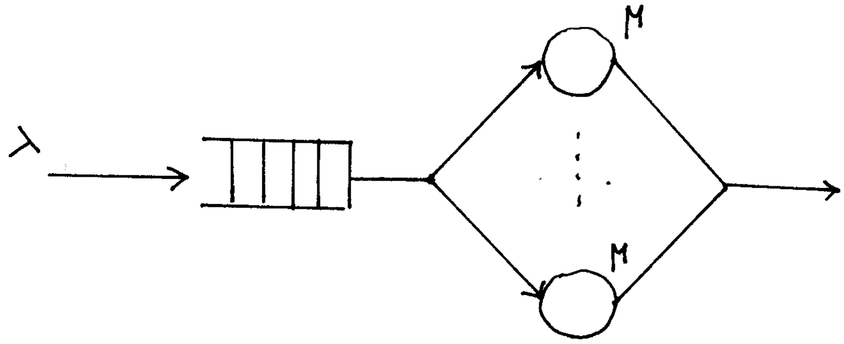
$$\mu(1-\pi_0) = \mu\left(1 - \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\right) = \mu \frac{\cancel{1} - \rho^{K+1} - \cancel{1} + \rho}{1-\rho^{K+1}} = \lambda \frac{1-\rho^K}{1-\rho^{K+1}}$$

<u>PROBABILITÀ DI BLOCCO</u>: è la probabilità a regime che un cliente in arrivo non venga accettato in coda.

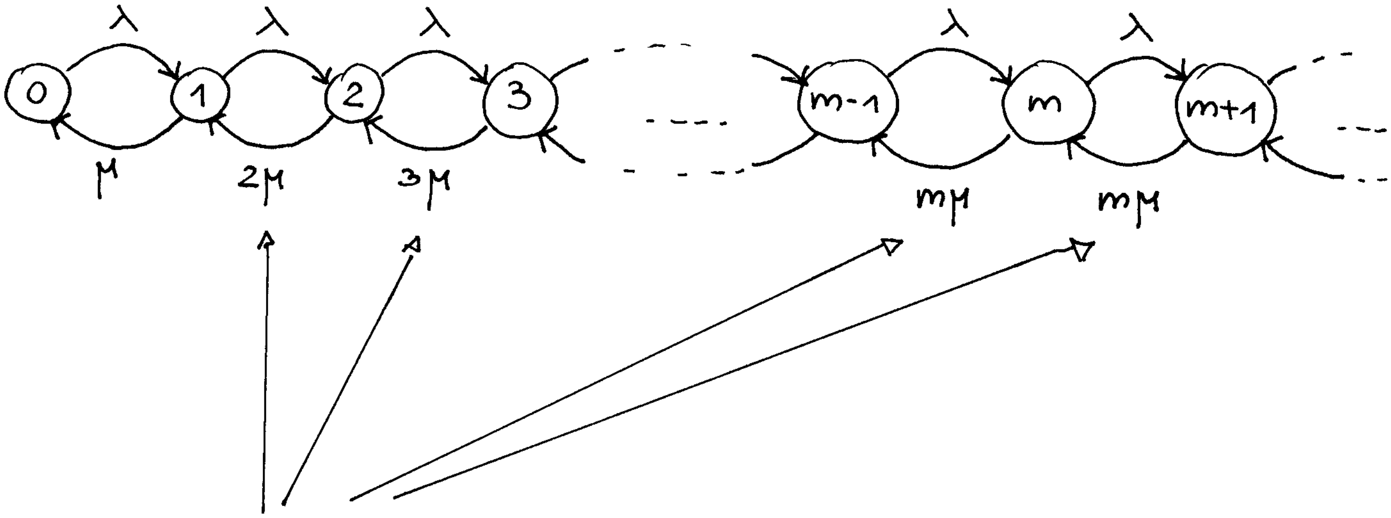
Per la proprietà PASTA:

$$P_B = P(X=K) = \pi_K = \rho^K \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$$

CODA DI SERVIZIO M/M/m



m serventi



OCCHIO!

Situazione simile nel caso $M/M/m/K$, con $K \geq m$.