CATENE DI MARKOV A TEMPO CONTINUO

proprietà di Markov

$$P\left(X(t_{k+1})=x_{k+1} \mid X(t_k)=x_k, \dots, X(t_0)=x_0\right) =$$

$$= P\left(X(t_{k+1})=x_{k+1} \mid X(t_k)=x_k\right)$$

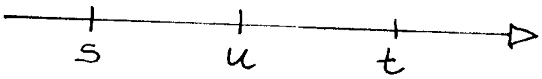
$$\forall k,\ \forall x_0, x_1, \dots, x_{k+1} \in \mathcal{X},\quad \forall t_0 \le t_1 \le \dots \le t_{k+1}$$

Definiamo la funzione di transizione:

$$p_{i,j}(s,t) = P\left(X(t)=j \mid X(s)=i\right) \qquad \text{per ogni } s \le t$$

NOTA - $p_{i,j}(s,t)$ è l'analogo a tempo continuo dei valori $p_{i,j}(k,k+n)$ a tempo discreto.

Fissato $u \in [s,t]$,



consideriamo la partizione dell'evento certo $\{X(u)=r \ \ \forall r \in \mathcal{X}\}$.

Applicando la regola della probabilità totale e la proprietà di Markov, otteniamo:

$$p_{i,j}(s,t) = P\left(X(t)=j \mid X(s)=i\right)$$

$$= \sum_{r \in \mathcal{X}} P\left(X(t)=j \mid X(u)=r, X(s)=i\right) P\left(X(u)=r \mid X(s)=i\right)$$

$$= \sum_{r \in \mathcal{X}} \underbrace{P\left(X(t)=j \mid X(u)=r\right)}_{p_{r,j}(u,t)} \underbrace{P\left(X(u)=r \mid X(s)=i\right)}_{p_{i,r}(s,u)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{p_{i,j}(s,t) = \sum_{r \in \mathcal{X}} p_{i,r}(s,u)\, p_{r,j}(u,t)} \qquad s \le u \le t$$

- equazione di Chapman-Kolmogorov (a tempo continuo) -

Come a tempo discreto, conviene riscrivere l'equazione di Chapman-Kolmogorov in forma matriciale. A tal fine, definiamo la matrice:

$$H(s,t) = \Big[p_{i,j}(s,t) \Big]_{\substack{i=0,1,\dots \\ j=0,1,\dots}}$$

$$= \begin{bmatrix} p_{0,0}(s,t) & p_{0,1}(s,t) & p_{0,2}(s,t) & \dots \\ p_{1,0}(s,t) & p_{1,1}(s,t) & \dots & \\ p_{2,0}(s,t) & \dots & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

NOTA: $H(s,t)$ è l'analoga a tempo continuo della matrice $H(k,k+n)$ a tempo discreto.

Osserviamo che $H(s,s) = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}$.

Infatti, $p_{i,i}(s,s) = P(X(s)=i \mid X(s)=i) = 1$, mentre $p_{i,j}(s,s) = P(X(s)=j \mid X(s)=i) = 0$ per $j \neq i$, assumendo che non possano accadere più di una transizione di stato in ogni istante di tempo (ricordare le assunzioni per i processi di Poisson).

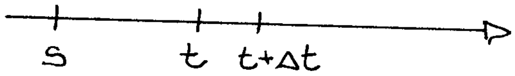
Osserviamo anche che la somma lungo ogni riga di $H(s,t)$ fa 1.

Dato che il generico elemento $p_{i,j}(s,t)$ si ottiene come prodotto della i-esima riga di $H(s,u)$ per la j-esima colonna di $H(u,t)$, risulta:

$$\boxed{H(s,t) = H(s,u)\,H(u,t)} \qquad s \leq u \leq t$$

che rappresenta la forma matriciale dell'equazione di Chapman-Kolmogorov.

Considerando ora $s \leq t \leq t+\Delta t$,



risulta:

$$H(s,t+\Delta t) = H(s,t)\,H(t,t+\Delta t)$$

Sottraendo $H(s,t)$ a entrambi i membri:

$$H(s,t+\Delta t) - H(s,t) = H(s,t)\left[H(t,t+\Delta t) - I\right]$$

e dividendo per Δt:

$$\frac{H(s,t+\Delta t) - H(s,t)}{\Delta t} = H(s,t)\,\frac{H(t,t+\Delta t) - I}{\Delta t}$$

Facciamo tendere $\Delta t \to 0$. A sinistra, osserviamo che:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{H(s,t+\Delta t) - H(s,t)}{\Delta t} = \frac{\partial H(s,t)}{\partial t},$$

supponendo che il limite esista. Analogamente, a destra, supponendo che il limite esista, <u>definiamo</u>:

$$Q(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{H(t,t+\Delta t) - I}{\Delta t}$$ – <u>matrice dei tassi di transizione</u> –

OSSERVAZIONE - Dato che $H(t,t)=I$, per $\Delta t \to 0$ il rapporto $\frac{H(t,t+\Delta t)-I}{\Delta t}$ è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. L'esistenza del limite comporta che si possa scrivere $H(t,t+\Delta t)=I+Q(t)\Delta t+o(\Delta t)$.

Assumendo dunque l'esistenza dei limiti sia a destra che a sinistra, otteniamo:

$$\boxed{\frac{\partial H(s,t)}{\partial t} = H(s,t)\,Q(t)} \qquad \text{con } s \leq t$$

- equazione di Chapman-Kolmogorov in avanti -

OSSERVAZIONE - Il termine "in avanti" fa riferimento al fatto che l'equazione può essere risolta (data $Q(t)$) integrandola avanti nel tempo con condizione iniziale $H(s,s)=I$.

Con passaggi simili, scegliendo $s \leq s+\Delta s \leq t$, si ottiene

$$\boxed{\frac{\partial H(s,t)}{\partial s} = -Q(s)\,H(s,t)} \qquad \text{con } s \leq t$$

- equazione di Chapman-Kolmogorov all'indietro -

che può essere risolta per integrazione all'indietro con condizione finale $H(t,t)=I$.

domanda: Cosa rappresentano gli elementi di $Q(t)$ dal punto di vista "fisico"?

Risponderemo a questa domanda per catene di Markov a tempo continuo omogenee.

Catene di Markov a tempo continuo omogenee

<u>Definizione</u>: Una catena di Markov a tempo continuo si dice <u>omogenea</u> se le funzioni di transizione $p_{i,j}(s,t)$ dipendono <u>solo</u> dalla differenza temporale $t-s$, per ogni $s \leq t$ e per ogni coppia $i,j \in \mathcal{X}$.

In questo caso, posto $t = s + \tau$, con $\tau \geq 0$, scriviamo:

$$p_{i,j}(\tau) = P\big(X(s+\tau)=j \mid X(s)=i\big) \quad \text{indipendente da } s$$

Di conseguenza, scriviamo anche:

$$H(\tau) = \big[\, p_{i,j}(\tau) \,\big]_{\substack{i=0,1,\dots \\ j=0,1,\dots}}$$

NOTA- Si ricordi sempre che la somma lungo ogni riga di $H(\tau)$ fa 1.

Risulta che:

$$Q(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{H(t, t+\Delta t) - I}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{H(\Delta t) - I}{\Delta t} \quad \text{indipendente da } t$$

Dunque, per una catena di Markov a tempo continuo omogenea, la matrice dei tassi di transizione è <u>costante</u>, e la indichiamo con Q.

Catene di Markov omogenee

<u>tempo discreto</u>

P: matrice delle probabilità di transizione in un passo <u>costante</u>

<u>tempo continuo</u>

Q: matrice dei tassi di transizione <u>costante</u>

Riprendiamo l'equazione di Chapman-Kolmogorov in avanti:

$$\frac{\partial H(s,t)}{\partial t} = H(s,t)\,Q(t) \quad \text{con } H(s,s)=I,\ s\le t$$

Nel caso di catene omogenee, essa si riscrive come:

$$\frac{\partial H(t-s)}{\partial t} = H(t-s)\,Q \quad \text{con } H(0)=I,\ s\le t$$

Operando il cambio di variabile $\tau = t-s$, per cui $\partial\tau = \partial t$, abbiamo:

$$\boxed{\frac{dH(\tau)}{d\tau} = H(\tau)\,Q} \quad \text{con } H(0)=I,\ \tau\ge 0$$

la cui soluzione è:

$$\boxed{H(\tau) = e^{Q\tau}} \quad \text{con } e^{Q\tau} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Q\tau)^k}{k!}$$

<u>Tempo di soggiorno in uno stato</u>

<u>ragionamento intuitivo:</u> Supponiamo che la catena entri nello stato i all'istante T. Allora, indicando con $V(i)$ il tempo di soggiorno nello stato i dall'istante corrente fino a quando avviene un cambio di stato, abbiamo che:

$$P\big(V(i) > s+t \,|\, V(i) > s\big) = P\big(V(i) > s+t \,|\, X(\tau)=i\ \ \forall T\le\tau\le T+s\big)$$

Markov $\longrightarrow$ $$= P\big(V(i) > s+t \,|\, X(T+s)=i\big) = P\big(V(i) > t\big)$$

è come se la catena sia entrata nello stato i all'istante T+s, e consideriamo la probabilità che ci resti per un periodo superiore a t

Dunque $V(i)$ soddisfa la <u>proprietà di mancanza di memoria</u>.

Noi sappiamo che l'unica distribuzione che soddisfa la proprietà di mancanza di memoria è (nel caso di variabili aleatorie continue) la distribuzione esponenziale.

Quindi vale il seguente risultato fondamentale:

La distribuzione dei tempi di soggiorno nello stato i di una catena di Markov a tempo continuo omogenea è di tipo esponenziale:

$$P(V(i) \leq t) = 1 - e^{-\Lambda(i)t}, \quad t \geq 0$$

dove $\Lambda(i) > 0$ è un parametro che dipende dal particolare stato i.

Quanto vale $\Lambda(i)$?

Ritorniamo a considerare un automa stocastico con temporizzazione di Poisson:

$(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, p, p_0, F)$, dove in particolare:

- $\mathcal{E} = \{1, .., m\}$
- $F = \{F_i : i = 1, .., m\}$ con $F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$, $t \geq 0$, $\lambda_i > 0$

distribuzioni delle durate di vita degli eventi

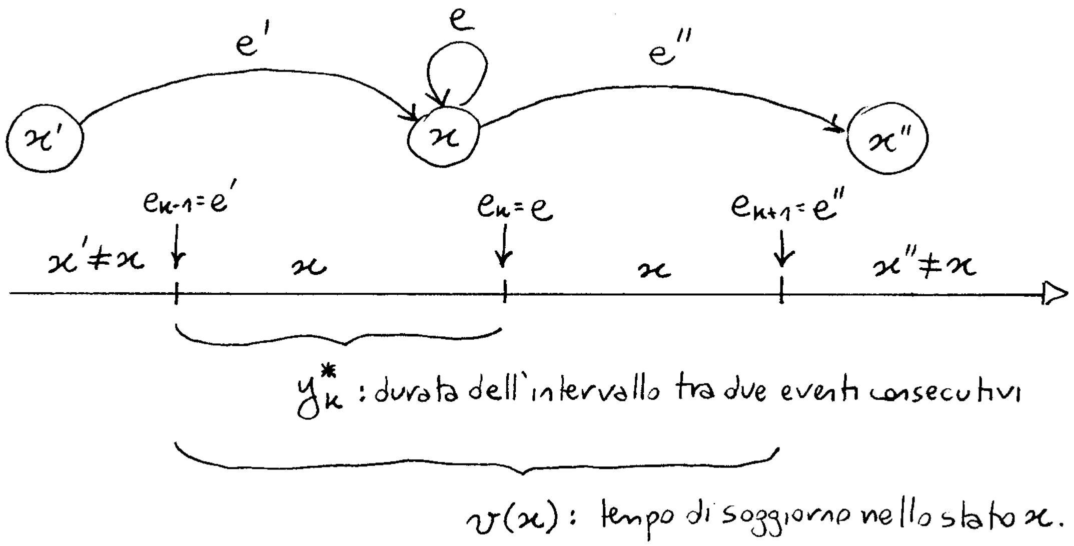
Abbiamo visto che lo stato dell'automa definisce un processo stocastico $\{X(t)\}$ che è una catena di Markov (processo di Markov con spazio di stato discreto) a tempo continuo. Inoltre:

$$P(Y_k^* \leq t \mid X_k = x) = 1 - e^{-\Lambda(x)t}, \quad t \geq 0$$

durata dell'intervallo tra due eventi consecutivi

dove $\Lambda(x) = \sum_{i \in \Gamma(x)} \lambda_i$.

insieme degli eventi possibili nello stato x



Quindi, in generale, nel caso di un automa a stati stocastico con temporizzazione di Poisson <u>non necessariamente</u> il tempo di soggiorno in uno stato coincide con la durata dell'intervallo tra due eventi consecutivi.

Quando rappresentiamo <u>lo stesso sistema</u> come una catena di Markov, ci concentriamo sulle <u>transizioni di stato</u> (i <u>nuovi eventi</u>), astraendo dagli eventi che, nell'automa stocastico, determinano tali transizioni.

Infatti, in un automa stocastico la stessa transizione di stato può corrispondere al verificarsi di eventi differenti. Per esempio,

$$x \xrightarrow{a,b} x' \qquad \text{con } p(x'|x,a)>0 \text{ e } p(x'|x,b)>0$$

Passando alla catena di Markov:

$$p(x|x') = p(x'|x,a)\,\bar{p}(a|x) + p(x'|x,b)\,\bar{p}(b|x)$$

Nella <u>rappresentazione come catena di Markov</u> perdiamo "risoluzione" a favore della "semplicità" del modello. Nell'esempio, i due eventi a e b sono inglobati nell'evento "transizione da x a x'" che avviene con probabilità $p(x'|x)$.

Ritorniamo ora a determinare quanto vale $\Lambda(i)$ nel caso della distribuzione esponenziale del tempo di soggiorno nello stato i per una catena di Markov a tempo continuo omogenea.

Dal ragionamento precedente ricaviamo che, se per una catena di Markov gli eventi sono le transizioni di stato, i tempi di soggiorno negli stati coincidono con durate degli intervalli tra eventi consecutivi. Ci aspettiamo quindi che $\Lambda(i)$ sia la somma dei parametri "λ" di tutte le transizioni di stato possibili dallo stato i.

Definiamo:

$e_{i,j}$: evento "transizione da i a j", generato con distribuzione esponenziale con tasso $\lambda_{i,j}$, $\underline{j \neq i}$.

$\Gamma(i) = \{ e_{i,j} : \text{la transizione da } i \text{ a } j \text{ è possibile}, j \neq i \}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Lambda(i) = \sum_{e_{i,j} \in \Gamma(i)} \lambda_{i,j}}$$

Vedremo in seguito come ricavare i valori $\lambda_{i,j}$.