Risultati sugli stati ricorrenti positivi/nulli

i) Se i è uno stato ricorrente positivo, e j è uno stato raggiungibile da i, allora anche j è ricorrente positivo.

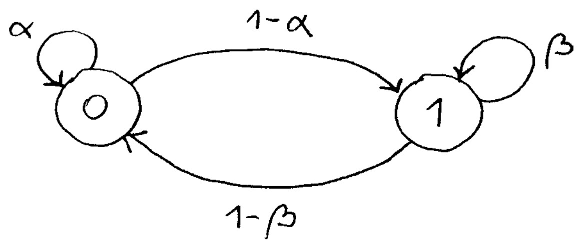
ii) Se S è un sottoinsieme chiuso e irriducibile, allora ogni stato in S è ricorrente positivo, oppure ogni stato in S è ricorrente nullo, oppure ogni stato in S è transitorio

OSSERVAZIONE: In una catena irriducibile, basta studiare la caratteristica di ricorrenza di un solo stato.

iii) Se S è un sottoinsieme chiuso, irriducibile e finito, allora ogni stato in S è ricorrente positivo.

OSSERVAZIONE: In una catena irriducibile e finita, ogni stato è ricorrente positivo.

Esempio



$\Rightarrow$ catena irriducibile e finita: ogni stato è ricorrente (positivo).

Verifichiamolo per lo stato 0...

$$P(T_{0,0}=1) = P(X_1=0 \mid X_0=0) = \alpha$$

$$\begin{aligned} P(T_{0,0}=2) &= P(X_2=0, X_1\neq 0 \mid X_0=0) \\ &= P(X_2=0 \mid X_1\neq 0, X_0=0)\, P(X_1\neq 0 \mid X_0=0) \\ &= P(X_2=0 \mid X_1=1, X_0=0)\, P(X_1=1 \mid X_0=0) \quad \ldots \end{aligned}$$

$$\underset{\text{Markov}}{\ldots} = P(X_2=0 \mid X_1=1)\, P(X_1=1 \mid X_0=0) = (1-\beta)(1-\alpha)$$

$$P(T_{0,0}=3) = P(X_3=0,\ X_2\neq 0,\ X_1\neq 0 \mid X_0=0)$$

$$= \ldots$$

$$= P(X_3=0 \mid X_2=1)\, P(X_2=1 \mid X_1=1)\, P(X_1=1 \mid X_0=0)$$

$$= (1-\beta)\,\beta\,(1-\alpha)$$

Proseguendo in questo modo si dimostra che:

$$P(T_{0,0}=k) = (1-\beta)\beta^{k-2}(1-\alpha) \quad \text{per } k>1.$$

$$\Rightarrow \quad \rho_0^{(k)} = \begin{cases} \alpha & \text{se } k=1 \\ (1-\alpha)(1-\beta)\beta^{k-2} & \text{se } k=2,3,4,\ldots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \rho_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_0^{(k)} = \alpha + \sum_{k=2}^{\infty} (1-\alpha)(1-\beta)\beta^{k-2}$$

$$= \alpha + (1-\alpha)(1-\beta)\sum_{k=0}^{\infty}\beta^{k} = \alpha + (1-\alpha)(1-\beta)\frac{1}{1-\beta}$$

$$= \alpha + (1-\alpha) = 1.$$

$\rho_0 = 1 \Rightarrow$ lo stato 0 e' <u>ricorrente.</u>

Inoltre:

$$M_0 = E[T_{0,0}] = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\rho_0^{(k)} = \alpha + \sum_{k=2}^{\infty} k\cdot(1-\alpha)(1-\beta)\beta^{k-2}$$

$$= \alpha + \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\beta^2}\sum_{k=2}^{\infty} k\beta^{k}$$

Serie geometrica:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad \text{se } |x|<1$$

Derivando il membro a sinistra:

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right] = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty} k x^k$$

Derivando il membro a destra:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{1-x}\right] = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Uguagliando le due derivate:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}}$$

Riprendiamo il calcolo di M_0.

$$\sum_{k=2}^{\infty} k\beta^k = \sum_{k=1}^{\infty} k\beta^k - \beta = \frac{\beta}{(1-\beta)^2} - \beta = \frac{\beta^2(2-\beta)}{(1-\beta)^2}$$

Dunque:

$$M_0 = \alpha + \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\beta^2}\cdot\frac{\beta^2(2-\beta)}{(1-\beta)^2} = \alpha + \frac{(1-\alpha)(2-\beta)}{1-\beta} < +\infty$$

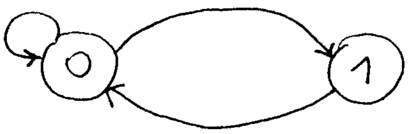
$M_0 < +\infty \implies$ lo stato 0 e' <u>ricorrente</u> <u>positivo</u>

Stati periodici

Si consideri l'insieme dei numeri interi

$$\Delta(i) = \{ n > 0 : p_{i,i}^{(n)} > 0 \}, \quad i \in \mathcal{X}.$$

Esempio



$\Delta(0) = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$\Delta(1) = \{2, 3, 4, \ldots\}$

Definiamo d_i il massimo comun divisore dell'insieme $\Delta(i)$.

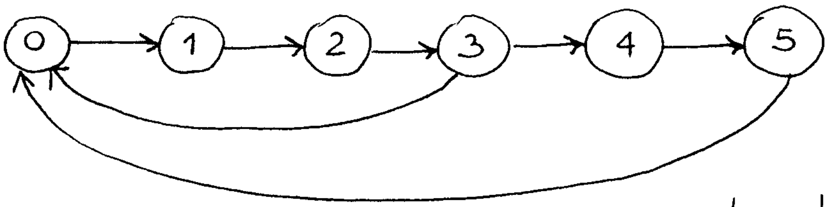
Definizione - *Uno stato i si dice periodico se $d_i \geq 2$; altrimenti, si dice aperiodico.*

Nell'esempio precedente, entrambi gli stati sono aperiodici perché $d_0 = d_1 = 1$.

OSSERVAZIONE: Uno stato i è certamente aperiodico se $p_{i,i} > 0$.

La quantità d_i viene chiamata "periodo" dello stato i, anche se non rappresenta propriamente un periodo per le occorrenze dello stato i, come risulta dal seguente

Esempio:



$\Delta(0) = \{4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$

$\Rightarrow d_0 = 2$

Lo stato 0 è periodico, ma non è vero che lo stato ritorna in 0 ogni 2 istanti di tempo.

TEOREMA: In una catena di Markov irriducibile, tutti gli stati hanno lo stesso periodo.

Analisi a regime

Dato uno stato i di una catena di Markov a tempo discreto omogenea, consideriamo il limite

$$\pi_i = \lim_{k\to\infty} \pi_i(k) \qquad \text{dove } \pi_i(k) = P(X_k = i)$$

Se π_i esiste, si dice probabilità stazionaria (o a regime) dello stato i.

Se π_i esiste per ogni $i \in \mathcal{X}$, il vettore

$$\pi = [\pi_0 \; \pi_1 \; \pi_2 \; \dots]$$

si dice vettore delle probabilità stazionarie dello stato.

ATTENZIONE: la quantità che raggiunge regime è la probabilità, non lo stato, che è sempre una variabile aleatoria.

Ci poniamo le seguenti domande:

i) Fissato $i \in \mathcal{X}$, sotto quali condizioni π_i esiste?

ii) Se π_i esiste per ogni $i \in \mathcal{X}$, $\{\pi_i\}_{i=0}^{\infty}$ definisce una densità di probabilità discreta, cioè $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$?

NOTA: $0 \leq \pi_i \leq 1$ perché $0 \leq \pi_i(k) \leq 1$ per ogni k.

Solo in questo caso i valori $\{\pi_i\}$ sono interpretabili come la densità di probabilità stazionaria dello stato della catena.

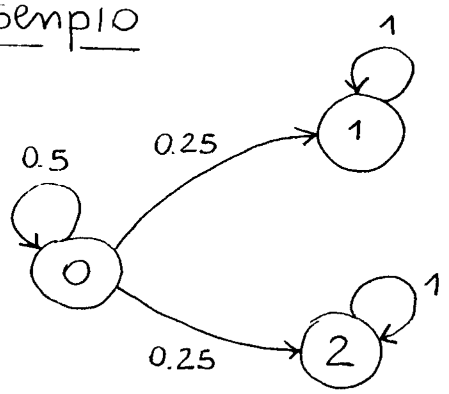
iii) Come valutare π_i?

OSSERVAZIONE: Ricordando che

$$\pi(k) = \pi(0)P^k,$$

in generale le probabilità stazionarie (se esistono) potrebbero dipendere da $\pi(0)$, cioè dal vettore delle probabilità dello stato all'istante iniziale.

esempio



$$\Rightarrow \quad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per la matrice di transizione P si può verificare facilmente che

$$P^k = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^k & \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} & \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi:

$$\lim_{k \to \infty} \pi(k) = \lim_{k \to \infty} \pi(0) P^k = \begin{bmatrix} \underbrace{0}_{\pi_0} & \underbrace{\frac{1}{2}\pi_0(0) + \pi_1(0)}_{\pi_1} & \underbrace{\frac{1}{2}\pi_0(0) + \pi_2(0)}_{\pi_2} \end{bmatrix}$$

Osserviamo che $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$ perché $\pi_0(0) + \pi_1(0) + \pi_2(0) = 1$.

Inoltre, i valori di π_1 e π_2 <u>dipendono</u> dalla condizione iniziale $\pi(0)$.

$\Rightarrow$ Si osservi che la catena <u>non è irriducibile</u>.

analisi a regime per catene di Markov irriducibili

Teorema: In una catena di Markov irriducibile e aperiodica, i limiti $\pi_i = \lim_{k\to\infty} \pi_i(k)$ esistono sempre e sono indipendenti dal vettore delle probabilità dello stato all'istante iniziale, $\pi(0)$.

OSSERVAZIONE: Sotto le ipotesi del teorema, abbiamo che le quantità π_i esistono per ogni $i \in \mathcal{X}$, ma il teorema non dice nulla riguardo il fatto se $\sum_{i\in\mathcal{X}} \pi_i = 1$.

Ricordiamo che, in una catena irriducibile, vale una delle seguenti affermazioni:

i) tutti gli stati sono transitori

ii) tutti gli stati sono ricorrenti nulli

iii) tutti gli stati sono ricorrenti positivi

Nei casi i) e ii) vale il seguente:

Teorema: In una catena di Markov irriducibile e aperiodica in cui tutti gli stati sono transitori, o tutti ricorrenti nulli, accade che

$$\pi_i = \lim_{k\to\infty} \pi_i(k) = 0$$

per ogni stato $i \in \mathcal{X}$, e non esiste dunque densità di probabilità stazionaria dello stato.

Nel caso iii) vale invece il seguente:

Teorema: In una catena di Markov irriducibile e aperiodica in cui tutti gli stati sono ricorrenti positivi, accade che

$$\pi_i = \lim_{k\to\infty} \pi_i(k) = \frac{1}{M_i}$$

dove M_i è il valore atteso del tempo di ricorrenza dello stato i.

Inoltre, $\sum_{i\in X} \pi_i = 1$. Il vettore π delle probabilità stazionarie dello stato si può ottenere come l'unica soluzione del sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \pi = \pi P \\ \sum_{i\in X} \pi_i = 1 \end{cases}$$

OSSERVAZIONE: Si ricordi che, se la catena di Markov è finita, $\lambda=1$ è autovalore della matrice di transizione P, e quindi il sistema

$$\pi = \pi P$$

ha infinite soluzioni perché $I-P$ è singolare. Sotto le ipotesi del teorema, il vincolo $\sum_{i\in X} \pi_i = 1$ permette di selezionare l'unica soluzione che rappresenta una densità di probabilità discreta.

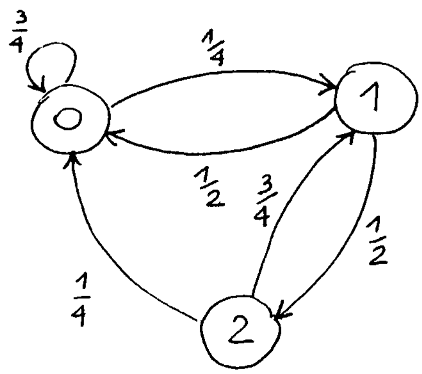
OSSERVAZIONE: Dato che ogni catena di Markov irriducibile e finita è costituita da stati ricorrenti positivi, si deduce dal teorema che

ogni catena di Markov irriducibile, aperiodica e finita ammette unica densità di probabilità stazionaria dello stato.

OSSERVAZIONE: La relazione $\pi_i = \frac{1}{M_i}$ ha una intuitiva interpretazione: quanto più piccolo è il valore atteso del tempo di ricorrenza dello stato i

(cioè, quanto più frequentemente la catena visita in media lo stato i), tanto più grande è la probabilità a regime di trovare la catena nello stato i. Si osservi che $M_i \geq 1$, perché il tempo di ricorrenza $T_{i,i}$ può assumere i valori $\{1, 2, 3, \dots\}$.

<u>ESEMPIO</u>: catena irriducibile, aperiodica e finita.



$$\Rightarrow \quad P = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

La distribuzione stazionaria Π dello stato esiste ed è

$$\begin{cases} \frac{3}{4}\Pi_0 + \frac{1}{2}\Pi_1 + \frac{1}{4}\Pi_2 = \Pi_0 \\ \frac{1}{4}\Pi_0 + \frac{3}{4}\Pi_2 = \Pi_1 \\ \frac{1}{2}\Pi_1 = \Pi_2 \\ \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 = 1 \end{cases}$$

Una equazione è ridondante, e la scartiamo (per esempio, la prima).
Sostituendo la terza equazione nella seconda:

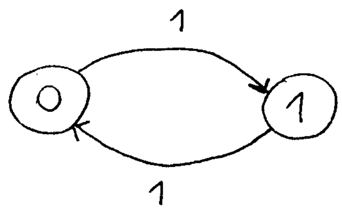
$$\frac{1}{4}\Pi_0 + \frac{3}{8}\Pi_1 = \Pi_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}\Pi_0 = \frac{5}{8}\Pi_1 \quad \Rightarrow \quad \Pi_0 = \frac{5}{2}\Pi_1$$

Sostituendo nella quarta:

$$\frac{5}{2}\Pi_1 + \Pi_1 + \frac{1}{2}\Pi_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad 4\Pi_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \Pi_1 = \frac{1}{4}$$

$$\Pi_0 = \frac{5}{2}\Pi_1 = \frac{5}{8} \quad ; \quad \Pi_2 = \frac{1}{2}\Pi_1 = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad \Pi = \left[\frac{5}{8} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \right].$$

ESEMPIO: catena irriducibile e finita, ma periodica



$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Osserviamo che:

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$P^3 = P \cdot P^2 = P \cdot I = P$$

$$P^4 = P \cdot P^3 = P \cdot P = P^2 = I \quad , \text{ ecc.}$$

Dunque in generale:

$$P^k = \begin{cases} I & \text{se } k = 0, 2, 4, \dots \\ P & \text{se } k = 1, 3, \dots \end{cases} \quad \Rightarrow \quad P^k = \begin{bmatrix} \frac{1+(-1)^k}{2} & \frac{1-(-1)^k}{2} \\ \frac{1-(-1)^k}{2} & \frac{1+(-1)^k}{2} \end{bmatrix}$$

La distribuzione di probabilità $\pi(k)$ dello stato è data da $\pi(k) = \pi(0) P^k$:

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_0(k) = \dfrac{1+(-1)^k}{2} \pi_0(0) + \dfrac{1-(-1)^k}{2} \pi_1(0) \\[2ex] \pi_1(k) = \dfrac{1-(-1)^k}{2} \pi_0(0) + \dfrac{1+(-1)^k}{2} \pi_1(0) \end{cases}$$

Dunque, i limiti $\lim_{k \to \infty} \pi_0(k)$ e $\lim_{k \to \infty} \pi_1(k)$ non esistono!