Ricordiamo che stiamo considerando catene di Markov a tempo discreto omogenee, caratterizzate dalle probabilità di transizione in un passo:

$$p_{i,j} = P(X_{k+1}=j \mid X_k = i) \qquad \forall i,j \in \mathcal{X}$$

Tempo di soggiorno in uno stato

Supponiamo che a un certo istante k lo stato sia $i \in \mathcal{X}$, e indichiamo con $V(i)$ il numero di istanti di tempo che lo stato della catena trascorre in i, prima di passare a un qualsiasi altro stato $j \neq i$.

Vogliamo determinare la densità di probabilità discreta di $V(i)$.

Si osservi che $V(i)$ può assumere i valori $\{1,2,3,\dots\}$.

- $P(V(i)=1) = P(X_{k+1} \neq i \mid X_k = i) = 1 - P(X_{k+1} = i \mid X_k = i) = 1 - p_{i,i}$

- $P(V(i)=2) = P(X_{k+2} \neq i, X_{k+1} = i \mid X_k = i)$

$$= P(X_{k+2} \neq i \mid X_{k+1} = i, X_k = i)\, P(X_{k+1} = i \mid X_k = i)$$

$$\text{Markov} \longrightarrow = P(X_{k+2} \neq i \mid X_{k+1} = i)\, P(X_{k+1} = i \mid X_k = i) =$$

$$= P(V(i)=1)\, p_{i,i} = (1-p_{i,i})\, p_{i,i}$$

- $P(V(i)=3) = P(X_{k+3} \neq i, X_{k+2} = X_{k+1} = i \mid X_k = i)$

$$= P(X_{k+3} \neq i, X_{k+2} = i \mid X_{k+1} = i, X_k = i)\, P(X_{k+1} = i \mid X_k = i)$$

$$\text{Markov} \longrightarrow = P(X_{k+3} \neq i, X_{k+2} = i \mid X_{k+1} = i)\, P(X_{k+1} = i \mid X_k = i)$$

$$= P(V(i)=2)\, p_{i,i} = (1-p_{i,i})\, p_{i,i} \cdot p_{i,i}$$

$$= (1-p_{i,i})\, p_{i,i}^2$$

Seguendo lo stesso ragionamento otteniamo in generale che:

$$\boxed{P(V(i)=n) = (1-p_{i,i})\, p_{i,i}^{n-1}, \quad n=1,2,3,\dots}$$

distribuzione geometrica con parametro $p_{i,i}$

Quindi la distribuzione geometrica è la controparte a tempo discreto della distribuzione esponenziale.

In particolare, gode della proprietà di mancanza di memoria:

$$P(V(i)=n+m \mid V(i)>n) = \frac{P(V(i)=n+m)}{P(V(i)>n)} = \frac{P(V(i)=n+m)}{1-P(V(i)\le n)}$$

$$= \frac{(1-p_{i,i})\,p_{i,i}^{n+m-1}}{p_{i,i}^{n}} = (1-p_{i,i})\,p_{i,i}^{m-1} = P(V(i)=m) \quad \forall m=1,2,3,\dots$$

OSSERVAZIONE- Abbiamo usato il fatto che:

$$P(V(i)\le n) = \sum_{j=1}^{n}(1-p_{i,i})\,p_{i,i}^{j-1} = (1-p_{i,i})\underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} p_{i,i}^{j}}_{\text{somma geometrica}} = (1-p_{i,i})\frac{1-p_{i,i}^{n}}{1-p_{i,i}}$$

$$= 1-p_{i,i}^{n}.$$

Si osservi anche che:

$$P(V(i)>n) = P(X_{k+n}=\dots=X_{k+1}=i \mid X_k=i) = p_{i,i}^{n}.$$

PROBABILITÀ DEGLI STATI

Definiamo

$$\boxed{\Pi_i(k) = P(X_k=i)}, \quad i=0,1,2,\dots, \quad k=0,1,2,\dots$$

Quindi $\pi_i(k)$ è la probabilità che lo stato della catena si trovi in i all'istante k.

Indichiamo con $\Pi(k)$ il vettore riga formato da tutte le probabilità degli stati all'istante k:

$$\Pi(k) = [\pi_0(k)\ \pi_1(k)\ \pi_2(k)\ \dots]$$

$\Rightarrow$ La somma di tutti gli elementi di $\Pi(k)$ fa 1. Infatti,

$$\sum_{i \in \mathcal{X}} \pi_i(k) = \sum_{i \in \mathcal{X}} P(X_k = i) = P(\underbrace{(X_k=0) \cup (X_k=1) \cup \dots}_{\text{evento certo}}) = 1$$

- Il vettore $\Pi(0)$, cioè il vettore delle probabilità degli stati all'istante iniziale, è un ulteriore dato che ci serve per specificare completamente una catena di Markov.

$\Rightarrow$ Una catena di Markov a tempo discreto omogenea è completamente specificata da:

- $\mathcal{X}$: spazio degli stati
- P : matrice di transizione (a un passo)
- $\Pi(0)$: vettore delle probabilità degli stati all'istante iniziale.

ANALISI DEL TRANSITORIO

Dati $\mathcal{X}$, P e $\Pi(0)$, rispondere a domande del tipo:

i) Qual è la probabilità di muoversi dallo stato i allo stato j in esattamente n passi?

ii) Qual è la probabilità di trovare lo stato della catena in i all'istante k?

Rispondere a queste domande richiede di considerare l'evoluzione della catena lungo un intervallo finito $\Rightarrow$ <u>analisi del transitorio</u>.

Alla domanda i) sappiamo già rispondere... La probabilità cercata è l'elemento (i,j) della matrice $H(n) = P^n$, che indichiamo con

$$\boxed{p_{i,j}^{(n)} = P(X_{k+n}=j \mid X_k = i)}$$

Cerchiamo ora di rispondere alla domanda ii). Vogliamo cioè determinare $\pi_i(k) = P(X_k = i)$.

$$\pi_j(k+1) = P(X_{k+1}=j) = \sum_{i\in \mathcal{X}} \underbrace{P(X_{k+1}=j \mid X_k=i)}_{p_{i,j}} \underbrace{P(X_k=i)}_{\pi_i(k)}$$

regola della probabilità totale

$$= \sum_{j\in\mathcal{X}} \pi_i(k)\, p_{i,j} = \text{prodotto di } \pi(k) \text{ per la } j\text{-esima colonna di } P$$

Dunque, in forma matriciale:

$$\boxed{\pi(k+1) = \pi(k)\,P}$$

equazione alle differenze con condizione iniziale $\pi(0)$

<u>Soluzione:</u>

$$\boxed{\pi(k) = \pi(0)\,P^k}$$

Dato che $H(k) = P^k$, possiamo anche scrivere: $\pi(k) = \pi(0)\,H(k)$.

Riepilogo

Due equazioni alle differenze fondamentali per catene di Markov a tempo discreto omogenee:

i) $H(n) = H(n-1)P \quad \Rightarrow \quad H(n) = P^n$

ii) $\pi(k+1) = \pi(k)P \quad \Rightarrow \quad \pi(k) = \pi(0)P^k$

CLASSIFICAZIONE DEGLI STATI

Ricordiamo la notazione:

$p_{i,j}^{(n)} = P(X_{k+n} = j \mid X_k = i)$ probabilità di transizione in n passi

Definizione - Uno stato j si dice raggiungibile da uno stato i se $p_{i,j}^{(n)} > 0$ per qualche $n = 1, 2, \ldots$

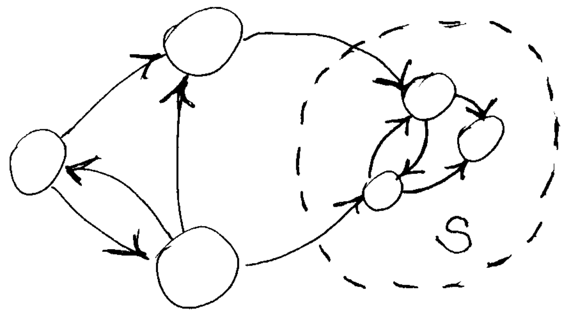
Osservazione: Considerando il diagramma (grafo) di transizione dello stato, j è raggiungibile da i se e solo se esiste un cammino orientato da i a j.

ATTENZIONE: Si assume di non mettere l'arco dal nodo i al nodo j se $p_{i,j} = 0$.

Definizione - Un sottoinsieme S di $\mathcal{X}$ si dice chiuso se

$p_{i,j} = 0 \quad \forall i \in S, j \notin S.$

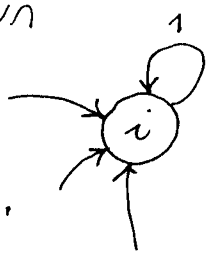
<u>Osservazione</u>: Nel grafo di transizione dello stato, <u>se S è chiuso</u>, non esistono archi uscenti da S verso stati non appartenenti a S



=> Se lo stato della catena entra in S, non ne uscirà più.

<u>Definizione</u> - Uno stato i si dice <u>assorbente</u> se forma un sottoinsieme <u>chiuso</u> di cui è l'unico elemento.

=> Uno stato i è assorbente <u>se e solo se</u> $p_{i,i} = 1$.

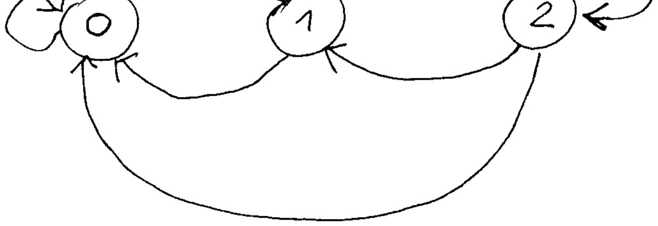


<u>Definizione</u> - Un sottoinsieme <u>chiuso</u> S si dice <u>irriducibile</u> se qualsiasi stato in S è <u>raggiungibile</u> da qualsiasi altro stato in S.

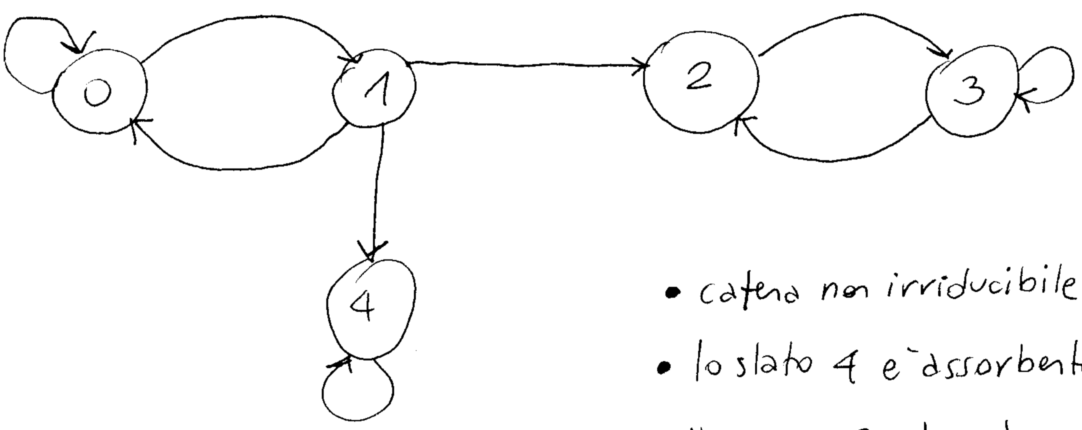
<u>Definizione</u> - Una <u>catena di Markov</u> si dice <u>irriducibile</u> se lo spazio di stato $\mathcal{X}$ è irriducibile.

=> In particolare, in una catena di Markov irriducibile non esistono né sottoinsiemi chiusi $S \neq \mathcal{X}$, né stati assorbenti.

<u>Esempi</u>:



catena di Markov irriducibile.



- catena non irriducibile
- lo stato 4 è assorbente
- l'insieme $S = \{2,3\}$ è chiuso e irriducibile.

Ci poniamo la seguente domanda:

> Se la catena è nello stato i a un certo istante, e lo abbandona, tornerà a visitarlo nuovamente nel futuro?

Definiamo il <u>tempo di percorrenza</u> $T_{i,j}$ nel seguente modo:

$$T_{i,j} = \min\{k>0 : X_0 = i,\ X_k = j\}, \quad i \neq j$$

è il primo istante in cui lo stato della catena arriva in j partendo dallo stato i, se $i \neq j$.

NOTA: $T_{i,j}$ è una variabile aleatoria!

sequenze degli stati:

000001 => $t_{i,j} = 5$

001 => $t_{i,j} = 2$

...

Se $i=j$, $T_{i,i}$ è il primo istante in cui lo stato della catena è di nuovo i, partendo dallo stato i.

In questo caso, $T_{i,i}$ si chiama <u>tempo di ricorrenza</u>.

$T_{i,i}$ è una variabile aleatoria che assume i valori $\{1,2,3,\dots\}$.

Definiamo:

$$\boxed{\rho_i^{(k)} = P(T_{i,i} = k), \quad k = 1,2,3,\dots}$$

Quindi la probabilità di essere di nuovo, nel futuro, nello stato i è data da:

$$\boxed{\rho_i = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_i^{(k)}} \quad \Rightarrow \quad \rho_i = 1 - P(\underbrace{T_{i,i} = \infty}_{\text{lo stato della catena non ritorna mai in } i})$$

<u>Definizione</u> - Uno stato $i \in \mathcal{X}$ si dice <u>ricorrente</u> se $\rho_i = 1$;

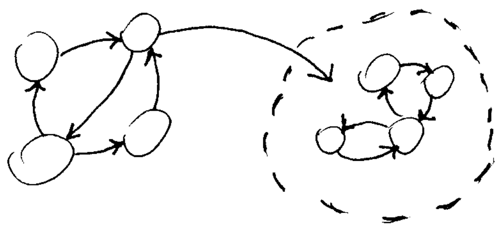
si dice <u>transitorio</u> se $\rho_i < 1$.

<u>Osservazione</u>: Se $\rho_i = 1$, vuol dire che $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_i^{(k)} = 1$.

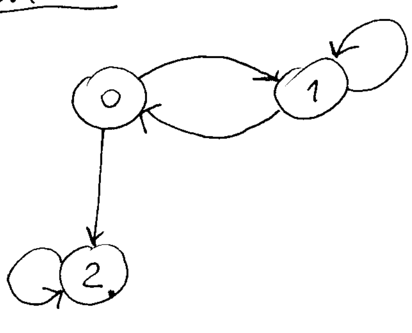
Quindi $\{\rho_i^{(k)}\}$ definisce una <u>densità di probabilità discreta</u>

↓ valori nell'intervallo $[0,1]$ (sono probabilità) e la loro somma fa 1.

<u>Osservazione</u>: Se esiste un sottoinsieme chiuso $S \neq \mathcal{X}$, e il grafo di transizione dello stato è debolmente connesso, allora esistono sicuramente stati non ricorrenti nella catena.



<u>ESEMPIO</u>:



2: ricorrente (infatti, assorbente $\Rightarrow$ ricorrente)

0,1: transitori

Risultati

i) Se una catena di Markov ha uno spazio di stato finito, almeno uno degli stati è ricorrente.

ii) Se i è uno stato ricorrente, e j è raggiungibile da i, anche j è uno stato ricorrente.

iii) Se S è un sottoinsieme di stati chiuso, irriducibile e finito, allora ogni stato in S è ricorrente.

CONSEGUENZA: In una catena di Markov irriducibile e finita, ogni stato è ricorrente.

Sia i uno stato ricorrente. Questo implica che $T_{i,i}$ può assumere i valori $\{1, 2, 3, \dots\}$, ma non ∞, e le probabilità $\rho_i^{(k)}$ definiscono una densità di probabilità discreta, che è proprio la densità di probabilità discreta della variabile aleatoria $T_{i,i}$.

Indichiamo dunque con M_i il valore atteso del tempo di ricorrenza dello stato i (se esiste), dato da:

$$\boxed{M_i = E[T_{i,i}] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \rho_i^{(k)}}$$

Definizione - Uno stato ricorrente i si dice ricorrente positivo se $M_i < +\infty$; altrimenti, si dice ricorrente nullo.

M_i esiste finito

Ricapitolando:

- transitorio $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_i^{(k)} < 1$

- ricorrente nullo $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_i^{(k)} = 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} k \rho_i^{(k)} = +\infty$

- ricorrente positivo $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_i^{(k)} = 1$, $\sum_{k=1}^{\infty} k \rho_i^{(k)} < +\infty$.