Consideriamo ancora un automa a stati stocastico con temporizzazione di Poisson $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, p, p_0, F)$, dove in particolare:

- $\mathcal{E} = \{1, \dots, m\}$, $m \geq 1$

- $p(x'|x,i)$ probabilità di transizione dello stato

$$p(x'|x,i) = P(X_{k+1} = x' \mid X_k = x, E_{k+1} = i)$$

noto lo stato corrente e il prossimo evento

- $F = \{F_i : i = 1, \dots, m\}$ con $F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}$, $t \geq 0$, $\lambda_i > 0$.

Per questo sistema abbiamo già calcolato:

i) $F^*(t|x) = P(Y_k^* \leq t \mid X_k = x)$

distribuzione condizionale dell'intervallo di tempo tra due eventi successivi

ii) $\bar{p}(i|x) = P(E_{k+1} = i \mid X_k = x)$

densità condizionale degli eventi

Vogliamo calcolare ora la probabilità di transizione dello stato, noto solo lo stato corrente:

$$P(X_{k+1} = x' \mid X_k = x)$$

Consideriamo la partizione dell'evento certo $\{E_{k+1} = i, \forall i \in \Gamma(x)\}$

Applicando la regola della probabilità totale abbiamo:

$$P(X_{k+1} = x' \mid X_k = x) = \sum_{i \in \Gamma(x)} \underbrace{P(X_{k+1} = x' \mid X_k = x, E_{k+1} = i)}_{p(x'|x,i)} \underbrace{P(E_{k+1} = i \mid X_k = x)}_{\bar{p}(i|x)}$$

$$= \sum_{i \in \Gamma(x)} p(x'|x,i)\, \bar{p}(i|x)$$

Osserviamo che $P(X_{k+1} = x' \mid X_k = x)$ dipende solo dallo stato corrente x, ed e' indipendente da k, cioe' dal numero di eventi occorsi per raggiungere lo stato x (proprieta' di omogeneita').

Si puo' dimostrare il seguente risultato fondamentale:

> Per il processo semi-Markov generalizzato $\{X(t)\}$ generato da un automa a stati stocastico con temporizzazione di Poisson, vale la proprieta' di Markov:
>
> $$P\big(X(t+h) \leq x \mid X(s) = x(s) \ \forall s \leq t\big) = P\big(X(t+h) \leq x \mid X(t) = x(t)\big) \quad \forall h > 0$$

Quindi $\{X(t)\}$ e' un processo di Markov, e soddisfa di conseguenza le proprieta' M1) e M2) dei processi di Markov.

CATENE DI MARKOV

Definizione - Si dice CATENA un processo stocastico $\{X(t)\}$ con spazio di stato $\mathcal{X}$ di cardinalità finita o numerabile.

Una CATENA DI MARKOV è una catena per la quale vale la proprietà di Markov:

$$P\big(X(t_{k+1}) = x_{k+1} \,|\, X(t_k) = x_k, \ldots, X(t_0) = x_0\big) =$$

$$= P\big(X(t_{k+1}) = x_{k+1} \,|\, X(t_k) = x_k\big)$$

$$\forall k, \ \forall x_0, x_1, \ldots, x_{k+1} \in \mathcal{X}, \ \forall t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_{k+1}.$$

$\Rightarrow$ Dunque il comportamento stocastico di una catena di Markov è descritto da funzioni di probabilità di transizione della forma:

$$P\big(X(t) = x' \,|\, X(s) = x\big) \quad \text{con } s \leq t$$

- Date le funzioni di probabilità di transizione e la distribuzione dello stato iniziale, è possibile determinare la probabilità di essere in un qualsiasi stato in un qualsiasi istante di tempo:

$$P\big(X(t) = x'\big) = \sum_{x \in \mathcal{X}} P\big(X(t) = x' \,|\, X(0) = x\big)\, P\big(X(0) = x\big).$$

Tuttavia, ricavare le funzioni di probabilità di transizione dai dati di un problema può richiedere, in generale, lo svolgimento di calcoli complessi.

Vedremo casi (catene di Markov omogenee e finite) dove ciò si riduce alla soluzione di un insieme di equazioni differenziali (tempo continuo) o alle differenze (tempo discreto) lineari e stazionarie per cui si dispone di strumenti sia teorici che analitici.

CATENE DI MARKOV A TEMPO DISCRETO

Dato che lo spazio di stato di una catena è un insieme numerabile, consideriamo come spazio di stato l'insieme dei numeri interi non negativi (o un suo sottoinsieme, se la cardinalità è finita):

$$\mathcal{X} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

In una catena, gli <u>eventi</u> sono le <u>transizioni di stato</u>. Essendo a tempo discreto, gli eventi possono accadere solo agli istanti $k = 0, 1, 2, \dots$

Dunque per una <u>catena di Markov a tempo discreto</u> la proprietà di Markov si riscrive come:

$$P(X_{k+1} = i_{k+1} \mid X_k = i_k, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{k+1} = i_{k+1} \mid X_k = i_k)$$

$$\forall k = 0, 1, 2, \dots \quad \forall i_0, i_1, \dots, i_{k+1} \in \mathcal{X}.$$

Indichiamo le <u>probabilità di transizione</u> (in un passo) come:

$$p_{i,j}(k) = P(X_{k+1} = j \mid X_k = i) \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \quad \forall i, j \in \mathcal{X}$$

e costruiamo la <u>matrice di transizione</u> (in un passo):

$$P(k) = \left[p_{i,j}(k) \right]_{\substack{i = 0, 1, 2, \dots \\ j = 0, 1, 2, \dots}} = \begin{bmatrix} p_{0,0}(k) & p_{0,1}(k) & p_{0,2}(k) & \dots \\ p_{1,0}(k) & p_{1,1}(k) & \dots & \\ p_{2,0}(k) & \dots & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

Osserviamo che la somma lungo ogni riga di $P(k)$ fa 1, cioè $\sum_{j \in \mathcal{X}} p_{i,j}(k) = 1$.

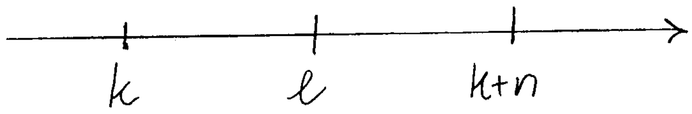
Infatti, $\{p_{i,j}(k)\}$ è una densità di probabilità discreta per i e k fissati.

Consideriamo ora <u>probabilità di transizione in n passi</u>:

$$p_{i,j}(k,k+n) = P(X_{k+n}=j \mid X_k = i) \qquad n=0,1,2,\dots$$

Si osservi che: $p_{i,j}(k,k+1) = p_{i,j}(k)$, e $p_{i,j}(k,k) = \begin{cases} 1 & \text{se } j=i \\ 0 & \text{se } j\neq i \end{cases}$.

Consideriamo un istante temporale ℓ tale che $k \le \ell \le k+n$.



Consideriamo poi la partizione dell'evento certo $\{X_\ell = r \ \forall r \in \mathcal{X}\}$.
Applicando la regola della probabilità totale, otteniamo:

$$p_{i,j}(k,k+n) = P(X_{k+n}=j \mid X_k=i) =$$

$$= \sum_{r\in\mathcal{X}} \underbrace{P(X_{k+n}=j \mid X_\ell = r, X_k = i)}_{\text{Markov: } \underbrace{P(X_{k+n}=j \mid X_\ell = r)}_{p_{r,j}(\ell,k+n)}} \underbrace{P(X_\ell = r \mid X_k = i)}_{p_{i,r}(k,\ell)}$$

$$\Rightarrow \boxed{p_{i,j}(k,k+n) = \sum_{r\in\mathcal{X}} p_{i,r}(k,\ell)\, p_{r,j}(\ell,k+n)} \qquad k\le \ell \le k+n$$

— <u>equazione di Chapman-Kolmogorov</u> —

Conviene riscrivere l'equazione di Chapman-Kolmogorov in forma matriciale.

Definiamo la matrice:

> NOTA- Si osservi che $H(k,k+n)$ ha dimensioni pari alla cardinalità di $\mathcal{X}$

$$H(k,k+n) = \left[p_{i,j}(k,k+n) \right]_{\substack{i=0,1,2,\dots \\ j=0,1,2,\dots}} =$$

$$= \begin{bmatrix} p_{0,0}(k,k+n) & p_{0,1}(k,k+n) & p_{0,2}(k,k+n) & \dots \\ p_{1,0}(k,k+n) & p_{1,1}(k,k+n) & \dots & \\ p_{2,0}(k,k+n) & \dots & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

Anche la somma lungo ogni riga di $H(k,k+n)$ fa 1. Osservando che il generico elemento $p_{i,j}(k,k+n)$ si ottiene come prodotto della i-esima riga di $H(k,\ell)$ per la j-esima colonna di $H(\ell,k+n)$, risulta:

$$\boxed{H(k,k+n) = H(k,\ell)\,H(\ell,k+n)} \qquad k \leq \ell \leq k+n$$

Scegliendo $\ell = k+n-1$, e osservando che $H(k+n-1,k+n) = P(k+n-1)$:

$$\boxed{H(k,k+n) = H(k,k+n-1)\,P(k+n-1)}$$

- <u>equazione di Chapman-Kolmogorov in avanti</u> -

<u>OSSERVAZIONE</u>: Il termine "in avanti" fa riferimento al fatto che l'equazione può essere risolta andando <u>avanti</u> nel tempo. Infatti:

$$H(k,k+1) = P(k) \quad \text{per definizione}$$

$$H(k,k+2) = H(k,k+1)P(k+1) = P(k)P(k+1)$$

$$H(k,k+3) = H(k,k+2)P(k+2) = P(k)P(k+1)P(k+2)$$

$$\vdots$$

$$H(k,k+n) = H(k,k+n-1)P(k+n-1) = \prod_{\ell=0}^{n-1} P(k+\ell).$$

Scegliendo invece $\ell = k+1$, e osservando che $H(k,k+1) = P(k)$:

$$\boxed{H(k,k+n) = P(k)\,H(k+1,k+n)}$$

- equazione di Chapman-Kolmogorov all'indietro -

In questo caso si parte da $H(k+n-1,k+n) = P(k+n-1)$, si passa poi a $H(k+n-2,k+n) = P(k+n-2)H(k+n-1,k+n) = P(k+n-2)P(k+n-1)$, ecc.

$\Rightarrow$ risoluzione indietro nel tempo.

Catene di Markov a tempo discreto omogenee

Definizione - Una catena di Markov a tempo discreto si dice omogenea se le probabilità di transizione in un passo $p_{i,j}(k)$ sono indipendenti da k per ogni coppia $i,j \in \mathcal{X}$. In questo caso scriviamo:

$$p_{i,j} = P(X_{k+1} = j \mid X_k = i) \quad \text{indipendente da } k$$

OSSERVAZIONE - L'omogeneità non implica la stazionarietà della catena, in generale. Infatti, $P(X_k = i)$ dipende anche da k, in generale.

In una catena di Markov a tempo discreto omogenea, la <u>matrice di transizione</u> (in un passo) è indipendente da k, e scriviamo

$$P = \left[p_{i,j} \right]_{\substack{i=0,1,2,\dots \\ j=0,1,2,\dots}} = \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & p_{0,2} & \dots \\ p_{1,0} & p_{1,1} & \dots & \\ p_{2,0} & \dots & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

<u>proprietà della matrice di transizione</u>

i) Ogni elemento di P è compreso tra 0 e 1.
(le $p_{i,j}$ sono probabilità!)

ii) La somma lungo una qualsiasi riga di P fa 1.

<u>CONSEGUENZA</u> - Se P ha dimensioni finite, allora $\lambda = 1$ è autovalore di P.
Infatti, si prenda il vettore $v = [1\ 1\ \dots\ 1]^T$. Risulta:

$$Pv = \begin{bmatrix} \vdots \\ \sum_j p_{i,j} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = v$$

=> v è autovettore di P relativo all'autovalore $\lambda = 1$.

Dalla soluzione dell'equazione di Chapman-Kolmogorov otteniamo:

$$H(k, k+n) = \prod_{\ell=0}^{n-1} P = P^n$$

=> Quindi anche $H(k,k+n)$ <u>non dipende da k</u>, ma solo dalla differenza temporale n. Per questo, per catene di Markov a tempo discreto omogenee, scriviamo:

$$H(n) = H(k, k+n) \qquad \underline{\text{indipendente da } k}$$

e l'equazione di Chapman-Kolmogorov in avanti diventa:

$$\boxed{H(n) = H(n-1)\,P} \quad \text{con condizione iniziale } H(0) = I,$$

la cui soluzione è appunto $H(n) = P^n$.

si ricordi che

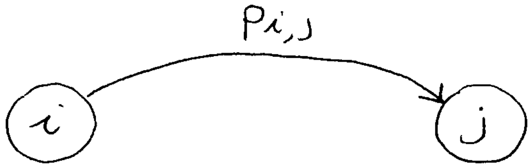
$$p_{i,j}(k,k) = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i \\ 0 & \text{se } j \neq i \end{cases}$$

matrice identità:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}$$

Rappresentazione grafica

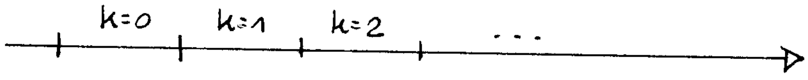
Una catena di Markov a tempo discreto omogenea può essere rappresentata con un diagramma di transizione dello stato (grafo) in cui gli archi sono etichettati con le probabilità di transizione (in un passo):



> NOTA - Non si mette l'arco se $p_{i,j} = 0$

Esempio: semplice processo di chiamate telefoniche

- Il tempo viene suddiviso in intervalli di uguale ampiezza, ciascuno etichettato da un indice $k = 0, 1, 2, \dots$



- Al più una singola chiamata avviene in ciascun intervallo. La probabilità di avere una chiamata in un intervallo è α.

- Se la linea è occupata, una nuova chiamata in arrivo viene rifiutata e persa; altrimenti, viene processata.

- C'è una probabilità β che una chiamata in fase di processamento termini in un intervallo.
- Se nello stesso intervallo avvengono sia il completamento di una chiamata che l'arrivo di una nuova chiamata, la nuova chiamata viene processata.
- Si assume che gli arrivi e i completamenti delle chiamate sono indipendenti tra loro e dallo stato del processo.

$\rightsquigarrow$ <u>modello come catena di Markov</u>

- spazio di stato: $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ 0: linea libera, 1: linea occupata

- matrice di transizione:

$$P = \begin{bmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} \\ p_{1,0} & p_{1,1} \end{bmatrix}$$

dove:

$$p_{0,0} = P(X_{k+1} = 0 \mid X_k = 0) = P(\text{nessun arrivo nel } (k+1)\text{-esimo intervallo})$$

$$= 1 - \alpha$$

$$p_{1,0} = P(X_{k+1} = 0 \mid X_k = 1) = P(\text{completamento } \underline{\underline{\text{e}}} \text{ nessun arrivo nel } (k+1)\text{-esimo intervallo})$$

$$\underset{\text{indipendenza}}{=} P(\text{completamento})\, P(\text{nessun arrivo}) = \beta \cdot (1 - \alpha)$$

Dato che la somma lungo ogni riga di P deve essere 1, risulta:

$$p_{0,1} = 1 - p_{0,0} = \alpha$$

$$p_{1,1} = 1 - p_{1,0} = 1 - \beta(1 - \alpha)$$

verifica

$$p_{0,1} = P(X_{k+1}=1 \mid X_k=0) = P(\text{un arrivo nel } (k+1)\text{-esimo intervallo}) = \alpha$$

$$p_{1,1} = P(X_{k+1}=1 \mid X_k=1)$$

$$= P\big((\text{nessun completamento}) \ \underline{\underline{\text{oppure}}} \ (\text{completamento } \underline{\underline{\text{e}}} \text{ arrivo}) \text{ nel } (k+1)\text{-esimo intervallo}\big)$$

$$= P(\text{nessun completamento}) + P(\text{completamento})\,P(\text{arrivo})$$

eventi disgiunti + indipendenti

$$= (1-\beta) + \beta \cdot \alpha = 1 - \beta(1-\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta(1-\alpha) & 1-\beta(1-\alpha) \end{bmatrix}$$

diagramma di transizione dello stato