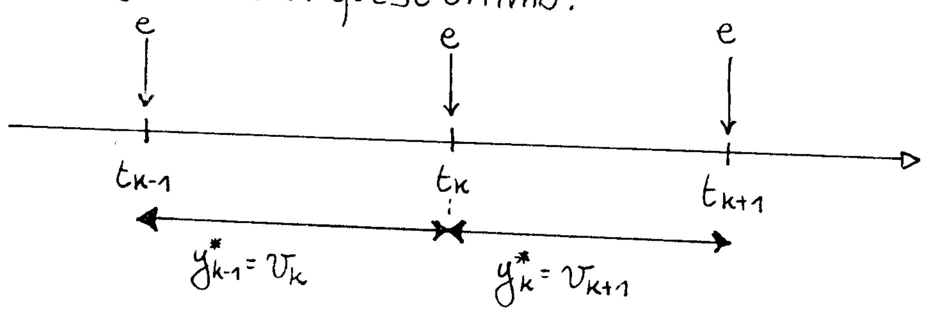
Riepilogo

Abbiamo dimostrato la seguente proprietà dei processi di Poisson:

(P1) Il processo stocastico $\{Y_k^*\}_{k=0}^{\infty}$ associato a un processo di Poisson è un processo indipendente e identicamente distribuito caratterizzato dalla distribuzione esponenziale

$$F(t) = P(Y_k^* \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Il coefficiente $\lambda > 0$ si chiama tasso o intensità del processo di Poisson.
Ricordiamo inoltre che abbiamo generato il processo di Poisson $\{N(t)\}$ come il processo di conteggio del numero di eventi in un SED con un singolo evento sempre possibile, e soddisfacente le Assunzioni A1, A2 e A3.
In particolare, quindi, per questo SED gli intervalli tra due occorrenze consecutive dell'unico evento possibile nel sistema coincidono con le differenti durate di vita di quest'ultimo:



Quindi $V_k = Y_{k-1}^* \sim F(t)$, $k = 1, 2, \ldots$

Dimostriamo ora altre due proprietà dei processi di Poisson.

2) proprietà di mancanza di memoria

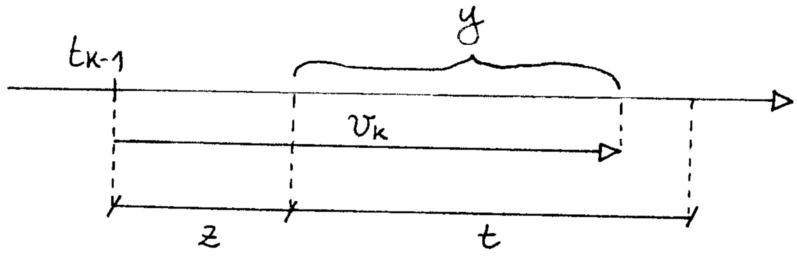
$$P(V_k \leq z+t \mid V_k > z) = \frac{P(z < V_k \leq z+t)}{P(V_k > z)} = \frac{F(z+t) - F(z)}{1 - F(z)} =$$

$$= \frac{(1 - e^{-\lambda(z+t)}) - (1 - e^{-\lambda z})}{1 - (1 - e^{-\lambda z})} = \frac{e^{-\lambda z} - e^{-\lambda(z+t)}}{e^{-\lambda z}} = 1 - e^{-\lambda t} = P(V_k \leq t),$$

$$\Rightarrow \boxed{P(V_k \le z+t \mid V_k > z) = P(V_k \le t) \;, \quad t \ge 0}$$

proprietà di mancanza di memoria della distribuzione esponenziale

Possiamo interpretare la proprietà di mancanza di memoria in termini della distribuzione di probabilità delle durate di vita residue dell'evento.



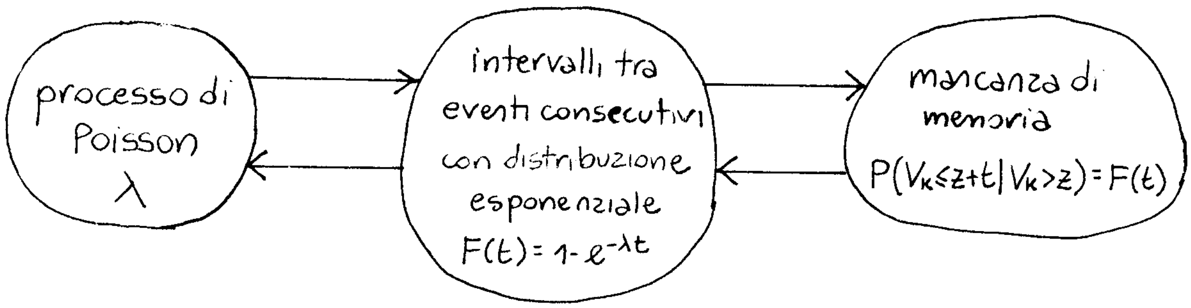
$$P(\underbrace{Y_{k-1}(z)}_{\text{durata di vita residua dell'evento all'istante } t_{k-1}+z} \le t \mid V_k > z) = P(V_k \le z+t \mid V_k > z) = P(V_k \le t)$$

Abbiamo dunque dimostrato la seguente proprietà:

(P2) In un processo di Poisson, ogni <u>durata di vita residua</u> di un evento è caratterizzata dalla stessa distribuzione esponenziale della corrispondente durata di vita complessiva:

$$P(Y_{k-1}(z) \le t \mid V_k > z) = P(V_k \le t) \quad , \; \forall t, z \ge 0.$$

<u>IMPORTANTE</u> - La proprietà di mancanza di memoria è posseduta <u>solo</u> dalla distribuzione esponenziale.



3) Sovrapposizione di processi di Poisson

- SED con m eventi, $m > 1 \Rightarrow \mathcal{E} = \{1, \dots, m\}$
- Tutti gli eventi sono sempre possibili $\Rightarrow \Gamma(x) = \mathcal{E} \;\; \forall x \in \mathcal{X}$
- Il verificarsi di ciascun evento è modellizzato come un processo di Poisson

  sequenza di temporizzazione

  $\Rightarrow F = \{F_i, \; i = 1, \dots, m\}$

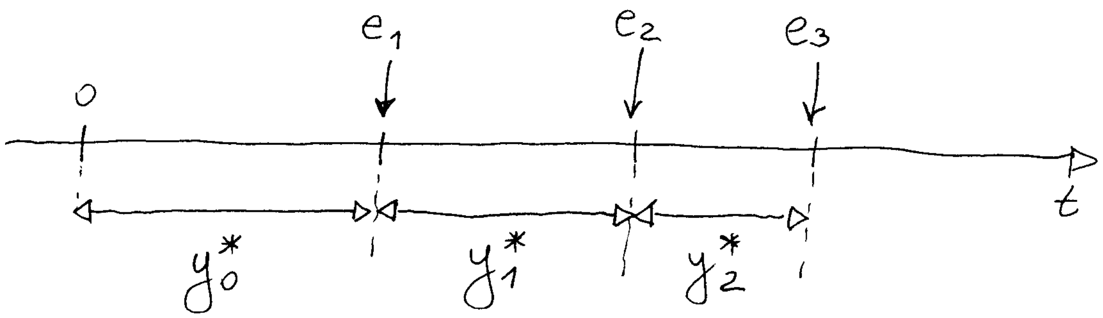
  dove $F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}, \; t \geq 0, \; \underline{\lambda_i > 0}$

- Gli m processi di Poisson sono indipendenti.

obiettivo - Calcolare la distribuzione di probabilità degli intervalli di tempo tra due eventi successivi, cioè la distribuzione di probabilità delle variabili aleatorie Y_k^*, $k = 0, 1, 2, \dots$

Ricordiamo che $Y_k^* = \min\limits_{i \in \mathcal{E}} Y_{i,k}$

durata di vita residua dell'evento i



$\Rightarrow y_0^*, y_1^*, y_2^*, \dots$ sono realizzazioni del processo stocastico $\{Y_k^*\}$

ATTENZIONE

- Per $k=0$, a ciascun evento $i \in \mathcal{E}$ viene associata una durata di vita iniziale estratta dalla corrispondente distribuzione F_i.

- Per $k>0$, viene associata una nuova durata di vita estratta dalla corrispondente distribuzione $F_{i'}$ solo all'evento che è accaduto, cioè $i'=e_k$. Agli eventi $i \neq i'$, viene associata la corrispondente durata di vita residua. Tuttavia, per la proprietà di mancanza di memoria della distribuzione esponenziale, per $i \neq i'$ anche le durate di vita residue sono distribuite secondo la distribuzione F_i.

$$P(Y_k^* \leq t) = 1 - P(Y_k^* > t) = 1 - P((Y_{1,k} > t) \cap \ldots \cap (Y_{m,k} > t))$$

$$\underset{\text{indipendenza}}{=} 1 - P(Y_{1,k} > t) \ldots P(Y_{m,k} > t) = 1 - e^{-\lambda_1 t} \cdot \ldots \cdot e^{-\lambda_m t} = 1 - e^{-\Lambda t}, \; t \geq 0.$$

avendo posto $\Lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$.

Quindi vale la seguente proprietà:

(P3) La sovrapposizione di m processi indipendenti di Poisson con tassi $\lambda_i > 0$, $i=1,\ldots,m$, è ancora un processo di Poisson con parametro

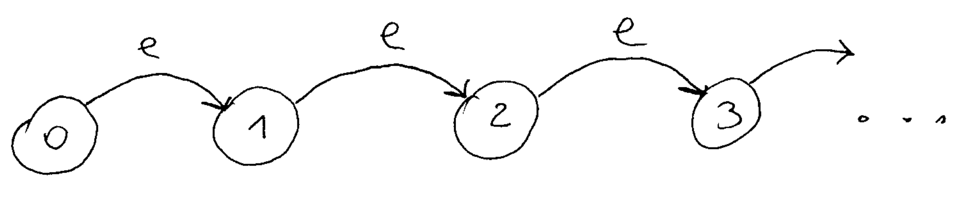
$$\Lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i.$$

OSSERVAZIONE

Un processo di Poisson (conteggio del numero di eventi in un SED per cui valgono le Assunzioni A_1, A_2 e A_3) con parametro λ può essere interpretato come un processo semi-Markov generalizzato generato da un automa a stati temporizzato stocastico $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, f, x_0, F)$ dove:

- $\mathcal{E} = \{e\}$ singolo evento
- $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, \dots\}$ interi non negativi
- $\Gamma(x) = \{e\} \quad \forall x \in \mathcal{X}$ evento e sempre possibile
- $f(x, e) = x + 1 \quad \forall x \in \mathcal{X}$ funzione deterministica di transizione dello stato
- $x_0 = 0$ stato iniziale deterministico
- $F_e(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \ t \geq 0, \ \lambda > 0.$

$\Rightarrow$ Abbiamo costruito un automa che conta le occorrenze dell'evento e.



$$x_0 = 0 \iff p_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esempi di processi di Poisson

- Il numero di pagine web richieste a un server
- Il numero di chiamate che arrivano a un centralino telefonico
- Il numero di fotoni che colpiscono un rilevatore illuminato da una sorgente laser
- L'arrivo di clienti in una coda.

...

AUTOMI A STATI STOCASTICI CON STRUTTURA DI TEMPORIZZAZIONE DI POISSON

Automa a stati temporizzato stocastico $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, p, p_0, F)$ dove

- $\mathcal{E} = \{1, .., m\}$
- $F = \{F_i, i = 1, .., m\}$ con $F_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t}, t \geq 0, \underline{\lambda_i > 0}$

distribuzione esponenziale delle durate di vita degli eventi.

- I processi di Poisson corrispondenti alle m sequenze di temporizzazione sono <u>indipendenti</u>.

⇒ Notare l'analogia con la sovrapposizione di m processi di Poisson. Tuttavia in questo caso <u>non</u> assumiamo che tutti gli eventi siano sempre possibili. Cioè, può accadere che $\Gamma(x) \subset \mathcal{E}$ per qualche $x \in \mathcal{X}$.

<u>obiettivo</u>: calcolare la distribuzione di probabilità degli intervalli di tempo tra due eventi consecutivi.

Possiamo procedere come nel caso della sovrapposizione di m eventi di Poisson. Tuttavia, dato che in questo caso gli eventi possibili dipendono dal particolare stato corrente, dobbiamo condizionarci alla conoscenza dello stato corrente : $\underline{X_k = x}$.

Noto $X_k = x$, allora

$$Y_k^* = \min_{\underline{\underline{i \in \Gamma(x)}}} Y_{i,k}$$

distribuzione di probabilità condizionale

$$\Rightarrow P(Y_k^* \leq t \mid X_k = x) = 1 - P(Y_k^* > t \mid X_k = x)$$

$$= 1 - \prod_{\underline{\underline{i \in \Gamma(x)}}} P(Y_{i,k} > t) = 1 - \prod_{i \in \Gamma(x)} e^{-\lambda_i t}$$

Definiamo $\Lambda(x) = \sum_{i \in \Gamma(x)} \lambda_i \, , \; \forall x \in \mathcal{X}.$

$$\Rightarrow \boxed{P(Y_k^* \leq t \mid X_k = x) = 1 - e^{-\Lambda(x) t}, \quad t \geq 0}$$

questa probabilità non dipende da k, ma solo da x.

Definiamo: $\boxed{F^*(t \mid x) = 1 - e^{-\Lambda(x) t} \, , \; t \geq 0}$

NOTA - $F^*(t|x)$ è ancora una distribuzione esponenziale. Quindi gode in particolare della proprietà di mancanza di memoria.

Simulazione di un automa con temporizzazione di Poisson

- genero x_0 estraendolo da $p_0(x)$
- genero y_0^* estraendolo da $F^*(t|x_0)$
- genero e_1 estraendolo da $\bar{p}(i|x_0)$ ⇐ da calcolare (vedi dopo)
- genero x_1 estraendolo da $p(x'|x_0, e_1)$
- genero y_1^* estraendolo da $F^*(t|x_1)$
- genero e_2 estraendolo da $\bar{p}(i|x_1)$

$\vdots$

Vogliamo determinare $P(E_{k+1} = i | X_k = x)$, $i = 1, 2, .., m$.

Ovviamente, $P(E_{k+1} = i | X_k = x) = 0 \quad \forall i \notin \Gamma(x)$

Se $i \in \Gamma(x)$, ed essendo $E_{k+1} = \arg \min\limits_{j \in \Gamma(x)} Y_{j,k}$, abbiamo che

$$\{E_{k+1} = i\} = \left\{ Y_{i,k} \leq \min_{\substack{j \in \Gamma(x) \\ j \neq i}} Y_{j,k} \right\}.$$

Definiamo $W_k = \min\limits_{\substack{j \in \Gamma(x) \\ j \neq i}} Y_{j,k}$

Calcoliamo la distribuzione di probabilità di W_k:

attenzione! Noto $X_k = x$.

$$P(W_k \leq w) = 1 - P(W_k > w)$$

$$= 1 - P(Y_{j,k} > w,\ \forall j \in \Gamma(x),\ j \neq i)$$

$$= 1 - \prod_{\substack{j \in \Gamma(x) \\ j \neq i}} P(Y_{j,k} > w) = 1 - \prod_{\substack{j \in \Gamma(x) \\ j \neq i}} e^{-\lambda_j w}$$

$Y_{j,k}$ v.a. indipendenti

$$= 1 - e^{-\Lambda_i(x) w}, \quad w \geq 0$$

avendo posto $\Lambda_i(x) = \sum_{\substack{j \in \Gamma(x) \\ j \neq i}} \lambda_j = \Lambda(x) - \lambda_i$.

Dunque W_k segue la distribuzione esponenziale di parametro $\Lambda_i(x)$, e la corrispondente densità di probabilità è:

$$f_W(w) = \begin{cases} \Lambda_i(x)\, e^{-\Lambda_i(x) w} & \text{se } w \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

D'altra parte, $Y_{i,k}$ segue la distribuzione esponenziale di parametro λ_i, a cui corrisponde la densità di probabilità

$$f_i(y) = \begin{cases} \lambda_i\, e^{-\lambda_i y} & \text{se } y \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

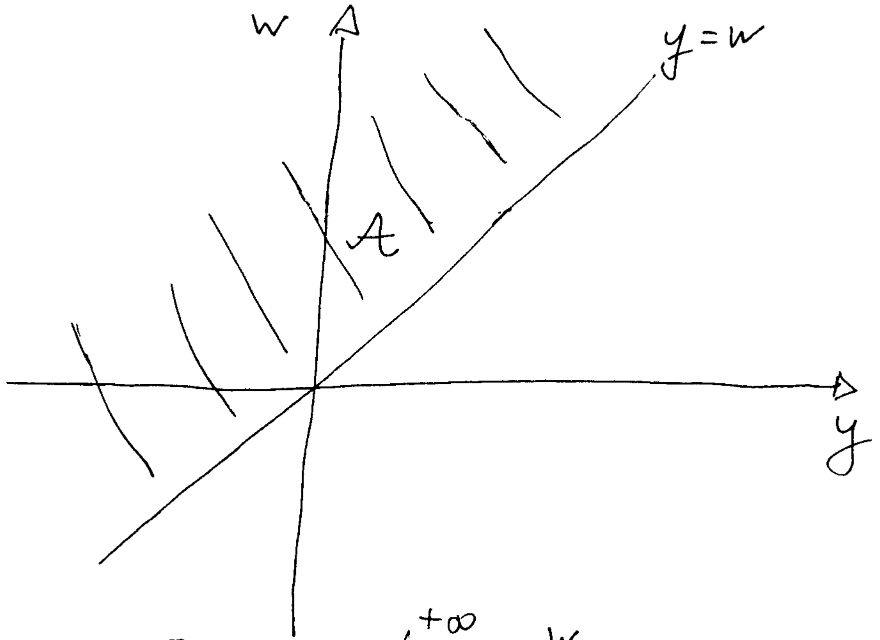
Dato che $Y_{i,k}$ e $Y_{j,k}$, $j \in \Gamma(x)$, $j \neq i$, sono v.a. indipendenti, allora $Y_{i,k}$ e $W_k = \min\limits_{\substack{j \in \Gamma(x) \\ j \neq i}} Y_{j,k}$

sono anch'esse v.a. indipendenti. La densità congiunta è dunque uguale al prodotto delle densità marginali:

$$P(E_{k+1} = i \mid X_k = x) = P\Big(Y_{i,k} \leq \min_{\substack{j \in \Gamma(x) \\ j \neq i}} Y_{j,k}\Big) =$$

$$= P(Y_{i,k} \leq W_k) = \iint_A f_i(y) f_W(w)\, dy\, dw$$

dove $A = \{(y, w) ; y \leq w\}$



$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{w} f_i(y) f_W(w)\, dy \right] dw = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{w} f_i(y)\, dy \right]}_{P(Y_{i,k} \leq w) = F_i(w)} f_W(w)\, dw$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(1 - e^{-\lambda_i w}\right) f_W(w)\, dw$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(1 - e^{-\lambda_i w}\right) \Lambda_i(x) e^{-\Lambda_i(x) w}\, dw$$

$$= \Lambda_i(x) \int_0^{+\infty} \left(1 - e^{-\lambda_i w}\right) e^{-\Lambda_i(x) w}\, dw$$

$$\Lambda_i(x) + \lambda_i = \Lambda(x)$$

$$= \Lambda_i(x) \int_0^{+\infty} \left(e^{-\Lambda_i(x) w} - e^{-\Lambda(x) w}\right) dw$$

$$= \Lambda_i(x) \left[-\frac{e^{-\Lambda_i(x) w}}{\Lambda_i(x)} + \frac{e^{-\Lambda(x) w}}{\Lambda(x)} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \Lambda_i(x) \left(\frac{1}{\Lambda_i(x)} - \frac{1}{\Lambda(x)} \right) =$$

$$= 1 - \frac{\Lambda_i(x)}{\Lambda(x)} = \frac{\Lambda(x) - \Lambda_i(x)}{\Lambda(x)} = \frac{\lambda_i}{\Lambda(x)}$$

$$\boxed{\bar{p}(i|x) = P\left(E_{k+1} = i \mid X_k = x\right) = \frac{\lambda_i}{\Lambda(x)} \quad \forall i \in \Gamma(x)}$$

<u>verifica</u>: $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \bar{p}(i|x) = \sum_{i \in \Gamma(x)} \bar{p}(i|x) = \sum_{i \in \Gamma(x)} \frac{\lambda_i}{\Lambda(x)} = \frac{\Lambda(x)}{\Lambda(x)} = 1.$

Infatti, $\bar{p}$ è una densità di probabilità discreta!