PROCESSI SEMI-MARKOV GENERALIZZATI

Un processo di Markov $\{X(t)\}$ è caratterizzato dal fatto che

$$P\left(X(t+h)\leq x \mid X(s)=x(s)\ \forall s\leq t\right) =$$

$$= P\left(X(t+h)\leq x \mid X(t)=x(t)\right) \qquad \forall h>0, \text{ecc.}$$

PROPRIETÀ DI MARKOV

Conseguenza della proprietà di Markov è che un processo di Markov è caratterizzato da due aspetti fondamentali:

M1) È irrilevante la traiettoria passata degli stati

M2) È irrilevante quanto tempo il processo ha trascorso nello stato corrente.

Per processi di Markov a stato discreto (anche detti catene) la proprietà (M2) impone severi vincoli alla natura delle variabili aleatorie che specificano gli intervalli di tempo tra due transizioni di stato consecutive. In particolare, vedremo che la distribuzione di probabilità di tali variabili risulta essere una distribuzione esponenziale.

Un processo semi-Markov è un rilassamento di un processo di Markov in cui il vincolo (M2) viene eliminato.

Questo significa che, all'istante in cui si effettua una transizione, la probabilità di terminare in un qualsiasi nuovo stato dipende solo dal valore corrente dello stato, e non dai valori passati $\longrightarrow$ proprietà (M1).

Tuttavia, gli intervalli di tempo tra due transizioni consecutive non sono più vincolati a seguire una distribuzione esponenziale, ma possono seguire distribuzioni arbitrarie.

Consideriamo ora un automa a stati temporizzato stocastico $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, p, p_0, F)$

L'evoluzione temporale dello stato dell'automa è un processo stocastico $\{X(t)\}$.

Definizione - Si dice processo semi-Markov generalizzato il processo stocastico $\{X(t)\}$ con spazio degli stati $\mathcal{X}$ generato da un automa a stati temporizzato stocastico $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, p, p_0, F)$.

Il motivo della precedente definizione è che il processo stocastico $\{X(t)\}$ ha un aspetto di Markovianità rappresentato dalle probabilità di transizione:

$$p(x'|x,e) = P(X_{k+1} = x' \mid X_k = x, E_{k+1} = e)$$

Infatti, se pensiamo all'istante di transizione t_{k+1} come suddiviso in due parti ($t_{k+1} = [t_{k+1}^-, t_{k+1}^+]$, con t_{k+1}^- quando accade l'evento e_{k+1}, e t_{k+1}^+ quando avviene la transizione di stato in x_{k+1}), allora in t_{k+1}^+ conosciamo l'evento che si è verificato. L'evento è dunque deterministicamente noto, come lo stato corrente, e la probabilità di transizione precedente esprime in qualche forma la proprietà (M1).

Tuttavia, gli intervalli di tempo tra due transizioni di stato (variabili aleatorie Y_k^*) non hanno in generale necessariamente una distribuzione esponenziale (=> non è un processo di Markov), né le corrispondenti distribuzioni possono essere arbitrariamente e direttamente specificate: esse dipendono (in generale in maniera complessa) dalle distribuzioni $\{F_e : e \in \mathcal{E}\}$ delle durate di vita degli eventi, e dal meccanismo di selezione del prossimo evento (=> non è un processo semi-Markov).

ANALISI DI UN PROCESSO SEMI-MARKOV GENERALIZZATO

obiettivo: determinare le caratteristiche di un processo semi-Markov generalizzato $\{X(t)\}$. Principalmente:

calcolare la probabilità di trovare il SED nello stato $x \in \mathcal{X}$ a un certo istante t:

$$P(X(t) = x)$$

... ma ci sono altri processi che interessano, e che sono collegati a $\{X(t)\}$:

i) La sequenza degli eventi $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$

$\hookrightarrow P(E_k = e), \quad e \in \mathcal{E}$

ii) La sequenza degli intervalli di tempo tra eventi successivi $\{Y_k^*\}_{k=0}^{\infty}$

$\hookrightarrow P(Y_k^* \leq t), \quad t \geq 0$

ci dà informazione sul tempo di soggiorno in uno stato, ecc.

iii) La sequenza dei contatori di attivazione $\{N_e(t)\}, \; e \in \mathcal{E}$.

$\hookrightarrow P(N_e(t) = n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

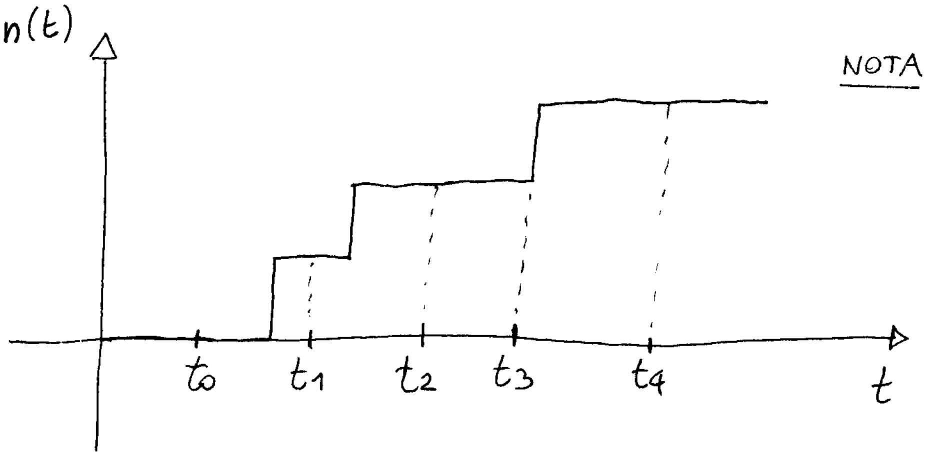
PROCESSI DI POISSON $\longrightarrow$ ci serviranno per modellizzare le sequenze di temporizzazione degli eventi in un SED

- SED con un singolo evento sempre possibile
- $\{N(t)\}$: processo che conta il numero di occorrenze dell'evento nell'intervallo $(0,t]$.

  i) $N(t) \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ => processo a stato discreto.

  ii) $N(t_0) \leq N(t_1) \leq \ldots \leq N(t_k)$

  se $t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_k$



NOTA: QUI gli istanti $t_0, t_1, \ldots, t_k$ non necessariamente coincidono con gli istanti in cui l'evento si verifica.

- Partizioniamo il tempo in un numero arbitrario di intervalli $(t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, 2, \ldots$ Anche l'ampiezza degli intervalli e' arbitraria.
- Consideriamo $t_0 = 0$ e $N(t_0) = N(0) = 0$.
- Definiamo $N(t_{k-1}, t_k) = N(t_k) - N(t_{k-1})$, $k = 1, 2, \ldots$

  => numero di occorrenze dell'evento nell'intervallo $(t_{k-1}, t_k]$.

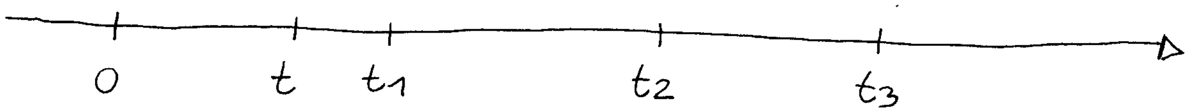
OBIETTIVO - Determinare $P_n(t) = P(N(t) = n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Assunzioni

(A1) In ciascun istante di tempo può accadere al più un evento.

(A2) $N(t), N(t,t_1), N(t_1,t_2), \dots, N(t_{k-1},t_k), \dots$

sono variabili aleatorie indipendenti per qualsiasi scelta $0 \le t \le t_1 \le t_2 \le \dots \le t_{k-1} \le t_k \le \dots$



$\Rightarrow$ Il conteggio degli eventi in un intervallo $(t_{k-1}, t_k]$ non è influenzato dal conteggio in altri intervalli $(t_{j-1}, t_j]$, $j \neq k$.

(A3) $P\big(N(t_{k-1},t_k)=n\big)$, $n=0,1,2,\dots$, è indipendente dagli istanti di tempo t_{k-1} e t_k, per qualsiasi intervallo $(t_{k-1},t_k]$, $k=1,2,\dots$

Può tuttavia dipendere dalla lunghezza $t_k - t_{k-1}$ dell'intervallo.

Definizione – Un processo $\{N(t)\}$ che soddisfa (A2) è detto a incrementi indipendenti; se, in aggiunta, è soddisfatta anche (A3), è detto a incrementi indipendenti stazionari.

Conseguenza di (A3)

$$P\big(N(t_{k-1},t_k)=n\big)=P\big(N(0,s)=n\big)=P\big(N(s)=n\big)$$

$\downarrow$ $s=t_k-t_{k-1}$ $\qquad n=0,1,2,\dots$

o anche, ponendo $t_{k-1}=t$ e $t_k=t+s$:

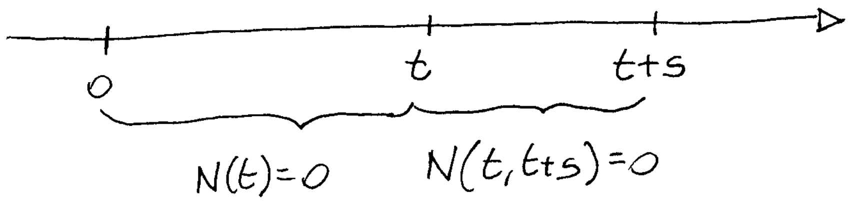
$$P\big(N(t,t+s)=n\big)=P\big(N(s)=n\big)\quad,\ s>0\ ,\ n=0,1,2,\dots$$

Vediamo ora come determinare $P_n(t)=P(N(t)=n)$ sotto le ASSUNZIONI A_1, A_2, A_3.

PASSO 1: Determinazione di $P_0(t)=P(N(t)=0)$

Fissati $t,s\geq 0$:

$$P\big(N(t+s)=0\big)=P\Big(\big(N(t)=0\big)\cap\big(N(t,t+s)=0\big)\Big)$$



$$\overset{(A2)}{=}P\big(N(t)=0\big)P\big(N(t,t+s)=0\big)$$

$$\overset{(A3)}{=}P\big(N(t)=0\big)P\big(N(s)=0\big)$$

$$\Rightarrow\ \boxed{P_0(t+s)=P_0(t)\,P_0(s)}\quad\forall t,s\geq 0$$

Inoltre:

- $P_0(0)=1$ perché abbiamo assunto $N(0)=0$ (condizione iniziale deterministica)

  $\searrow P(N(0)=0)$

- $0 \leq P_0(t) \leq 1, \ \forall t \geq 0$ perchè è una probabilità.

<u>LEMMA</u> - Se $g(t)$ è una funzione differenziabile su $(0,+\infty)$ e tale che:

i) $g(0)=1$

ii) $0 \leq g(t) \leq 1 \quad \forall t \geq 0,$

allora accade che, per ogni $s,t \geq 0$,

$$g(t+s) = g(t)\, g(s)$$

se e solo se $g(t) = e^{-\lambda t}$ per qualche $\lambda > 0$.

Quindi, <u>assumendo</u> $P_0(t)$ differenziabile su $(0,+\infty)$, per il lemma precedente vale che

$$P_0(t) = e^{-\lambda t} \quad \text{per qualche } \lambda > 0.$$

<u>PASSO 2: Comportamento infinitesimo di $P_0(t)$</u>

Dato che $P_0(t) = e^{-\lambda t}$, sviluppando $P_0(t)$ in serie di Taylor nell'intorno di $t=0$, otteniamo:

$$P_0(\delta t) = P_0(0) + P_0'(0)\,\delta t + o(\delta t)$$

$$= 1 - \lambda\,\delta t + o(\delta t) \qquad \text{dove } \frac{o(\delta t)}{\delta t} \to 0 \text{ per } \delta t \to 0$$

<u>PASSO 3: Comportamento infinitesimo di $P_n(t)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$</u>

Per (A1) due eventi non possono accadere simultaneamente. Quindi, per $\delta t \to 0$, al più un evento può accadere nell'intervallo δt:

$\Rightarrow P_n(\delta t) = o(\delta t)$ per $n = 2, 3, \ldots$

D'altra parte, $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\delta t) = 1$. Utilizzando le relazioni precedenti:

$$1 = \underbrace{P_0(\delta t)}_{1-\lambda\delta t + o(\delta t)} + P_1(\delta t) + \underbrace{P_2(\delta t) + \ldots}_{o(\delta t)}$$

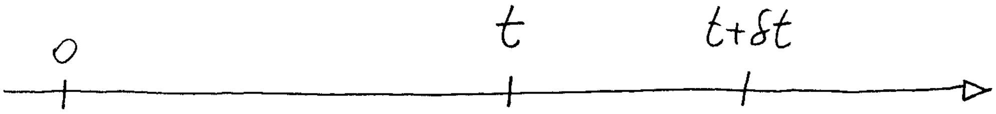
possiamo quindi ricavare:

$$\boxed{P_1(\delta t) = \lambda \delta t + o(\delta t)}$$

PASSO 4 - Comportamento infinitesimo di $P_n(t+\delta t)$, $n = 1, 2, \ldots$

Consideriamo gli intervalli $(0, t]$ e $(t, t+\delta t]$.

Se accade l'evento $\{N(t+\delta t) = n\}$ con $n > 0$, ci sono $n+1$ possibili eventi mutuamente esclusivi che potrebbero averlo determinato:



	$(0, t]$		$(t, t+\delta t]$	
$n+1$ possibilità	n	occorrenze	0	occorrenze
	$n-1$	"	1	"
	$\vdots$	"	$\vdots$	$\vdots$
	1	"	$n-1$	"
	0	"	n	"

$\Longrightarrow$ partizione dell'evento certo.

Quindi:

$$P_n(t+\delta t) = P(N(t+\delta t)) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} P\big((N(t)=j) \cap (N(t,t+\delta t)=n-j)\big)$$

partizione dell'evento certo

$$\overset{(A2)}{=} \sum_{j=0}^{n} P(N(t)=j)\, P(N(t,t+\delta t)=n-j)$$

$$\overset{(A3)}{=} \sum_{j=0}^{n} P(N(t)=j)\, P(N(\delta t)=n-j)$$

$$= P(N(t)=n)P(N(\delta t)=0) + P(N(t)=n-1)P(N(\delta t)=1) +$$

$$+ P(N(t)=n-2)P(N(\delta t)=2) + \dots$$

$$= P_n(t)\underbrace{P_0(\delta t)}_{1-\lambda\delta t+o(\delta t)} + P_{n-1}(t)\underbrace{P_1(\delta t)}_{\lambda\delta t+o(\delta t)} + P_{n-2}(t)\underbrace{P_2(\delta t)}_{o(\delta t)} + \dots$$

$$= (1-\lambda\delta t)P_n(t) + \lambda\delta t\, P_{n-1}(t) + o(\delta t)$$

PASSO 5: Determinazione di $P_n(t)$, $n=1,2,\dots$

$$P_n(t+\delta t) = (1-\lambda\delta t)P_n(t) + \lambda\delta t\, P_{n-1}(t) + o(\delta t)$$

$$\Rightarrow P_n(t+\delta t) - P_n(t) = -\lambda\delta t\, P_n(t) + \lambda\delta t\, P_{n-1}(t) + o(\delta t)$$

$$\Rightarrow \frac{P_n(t+\delta t) - P_n(t)}{\delta t} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \frac{o(\delta t)}{\delta t}$$

Prendiamo il limite per $\delta t \to 0$:

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dP_n(t)}{dt} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)}$$

equazione differenziale lineare stazionaria del primo ordine nell'incognita $P_n(t)$, dove $P_{n-1}(t)$ e' l'ingresso.

Per $n=1$:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda P_1(t) + \lambda P_0(t) = -\lambda P_1(t) + \lambda e^{-\lambda t}$$

Laplace $\Rightarrow$ $$s P_1(s) - \underbrace{P_1(0)}_{=0} = -\lambda P_1(s) + \lambda \frac{1}{s+\lambda}$$

perche' $N(0)=0$, quindi $P(N(0)=1)=0$.

$$\Rightarrow \quad (s+\lambda)\, P_1(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda} \quad \Rightarrow \quad P_1(s) = \frac{\lambda}{(s+\lambda)^2}$$

$$\Rightarrow \quad P_1(t) = \lambda \cdot t e^{-\lambda t} = (\lambda t) e^{-\lambda t}$$

Procedendo allo stesso modo per tutti gli altri n, otteniamo:

$$\boxed{P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots}$$

- distribuzione di Poisson con parametro λt -

Media e varianza della distribuzione di Poisson

$$E[N(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

$$= e^{-\lambda t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{(n-1)!} \underset{m=n-1}{=} e^{-\lambda t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{m+1}}{m!}$$

$$= (\lambda t) e^{-\lambda t} \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^m}{m!}}_{e^{\lambda t}} = \lambda t$$

⇒ $E[N(t)]$ è una funzione lineare in t, e λ ne rappresenta il coefficiente angolare.

Quindi λ è il tasso medio con cui gli eventi si verificano per unità di tempo.

⇒ Il coefficiente λ viene denominato <u>tasso</u> o <u>intensità</u> del processo di Poisson.

$$Var(N(t)) = E[N^2(t)] - E[N(t)]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n(t) - (\lambda t)^2 = \dots =$$

$$= \left(\lambda t + (\lambda t)^2 \right) - (\lambda t)^2 = \lambda t$$

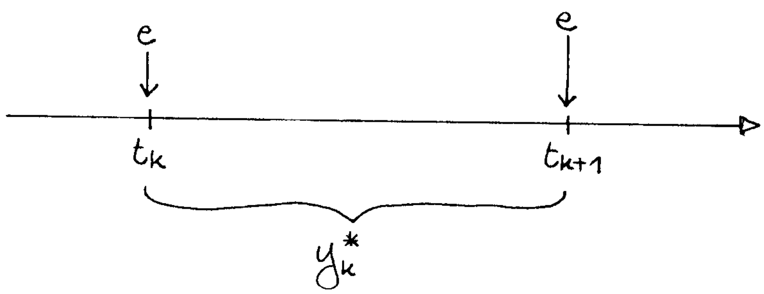
⇒ Quindi, per la distribuzione di Poisson, media e varianza hanno lo stesso valore numerico.

PROPRIETÀ DEI PROCESSI DI POISSON

Ricordiamo che abbiamo generato il processo di Poisson $\{N(t)\}$ come il processo di conteggio del numero di eventi in un SED con un singolo evento sempre possibile, e soddisfacente le Assunzioni A_1, A_2 e A_3. Quindi, per questo SED, gli intervalli tra due occorrenze consecutive dell'unico evento possibile nel sistema coincidono con le differenti durate di vita di quest'ultimo.

1) Distribuzione esponenziale degli intervalli tra due eventi consecutivi

Vogliamo calcolare la distribuzione di probabilità delle variabili aleatorie Y_k^*, $k=0,1,2,\dots$



Osserviamo che anche gli estremi dell'intervallo sono variabili aleatorie!
Proseguiamo nel seguente modo, calcolando la probabilità condizionale:

$$P(Y_k^* \leq t \mid T_k = t_k) = 1 - P(Y_k^* > t \mid T_k = t_k) \quad , \; \forall t \geq 0$$

Osserviamo che:

$$P(Y_k^* > t \mid T_k = t_k) = P\big(N(t_k, t_k + t) = 0\big)$$

Infatti, se $Y_k^* > t$, ciò implica che nell'intervallo $(t_k, t_k + t]$ non accadono eventi

$$\overset{(A3)}{=} P\big(N(t) = 0\big) = e^{-\lambda t}$$

Quindi:

$$P(Y_k^* \leq t \mid T_k = t_k) = 1 - e^{-\lambda t}$$ indipendente da t_k.

Ciò implica che le variabili aleatorie Y_k^* e T_k sono indipendenti, e

$$P(Y_k^* \leq t \mid T_k = t_k) = P(Y_k^* \leq t).$$

Abbiamo dunque ricavato la distribuzione di probabilità di Y_k^*:

$$P(Y_k^* \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

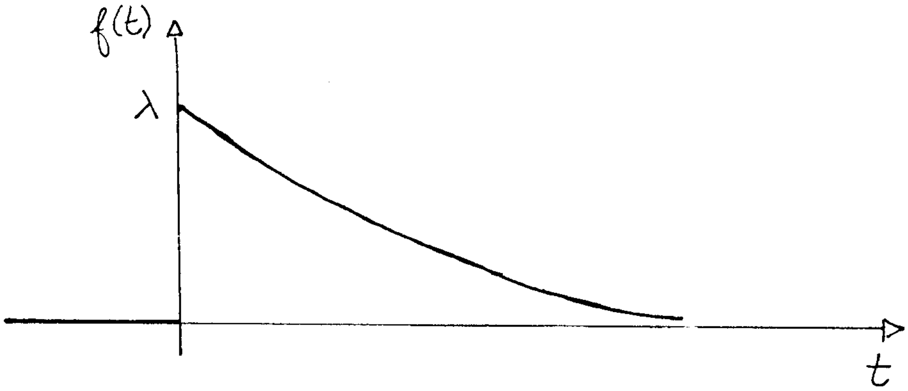
Concludiamo che:

Il processo stocastico $\{Y_k^*\}_{k=0}^{\infty}$ associato a un processo di Poisson è un processo <u>indipendente e identicamente distribuito</u>. Ciascuna variabile aleatoria Y_k^* segue la <u>distribuzione esponenziale</u>

$$F(t) = P(Y_k^* \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

cui corrisponde la densità esponenziale:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$



<u>media e varianza della distribuzione esponenziale</u>

$$E[Y_k^*] = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot f(t)\,dt = \int_{0}^{+\infty} t \cdot \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \ldots = \frac{1}{\lambda}$$

integrare per parti...

$\Rightarrow$ Il coefficiente λ può essere ulteriormente interpretato come il reciproco del valore atteso degli intervalli tra due eventi consecutivi nel processo di Poisson.

$$Var(Y_k^*) = E[(Y_k^*)^2] - E[Y_k^*]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \cdot f(t)\,dt - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \ldots = \frac{1}{\lambda^2}.$$