RIEPILOGO: automi a stati temporizzati

Sestupla $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, f, x_0, V)$ dove:

- $\mathcal{E}$, insieme numerabile di eventi
- $\mathcal{X}$, insieme numerabile di stati
- $\forall x \in \mathcal{X}$. $\Gamma(x)$ insieme degli eventi che sono possibili nello stato x
- $f : \mathcal{X} \times \mathcal{E} \to \mathcal{X}$ funzione di transizione dello stato
- $x_0 \in \mathcal{X}$ stato iniziale
- $V = \{ v_e : e \in \mathcal{E} \}$ struttura di temporizzazione

$\forall e \in \mathcal{E}$. $v_e = \{ v_{e,1}, v_{e,2}, \dots \}$ sequenza di temporizzazione dell'evento e

$v_{e,i} \geq 0$ durata di vita i-esima dell'evento e.

Finora abbiamo considerato le sequenze v_e, $e \in \mathcal{E}$, come specificate in maniera deterministica.

D'ora in poi consideriamo tali sequenze come specificate in maniera stocastica. Questo significa che le durate di vita degli eventi sono variabili aleatorie, ciascuna con la propria distribuzione di probabilità.

Questo implica che la sequenza di temporizzazione di un evento $e \in \mathcal{E}$ è specificata come un processo stocastico;

$\forall e \in \mathcal{E}. \quad V_e = \{ V_{e,1}, V_{e,2}, \dots \}$

collegamento con automi a temporizzazione deterministica:

$v_{e,1}$ realizzazione di $V_{e,1}$

$v_{e,2}$ " di $V_{e,2}$, ecc.

Introduciamo ora due assunzioni su cui baseremo le definizioni seguenti:

ASSUNZIONI

i) Fissato $e \in \mathcal{E}$, assumiamo che tutte le durate di vita $V_{e,i}$ di e siano indipendenti e identicamente distribuite.

ii) Le durate di vita di eventi distinti sono indipendenti

Conseguenza dell'Assunzione i) è che, fissato $e \in \mathcal{E}$, le variabili aleatorie $V_{e,1}, V_{e,2}, \dots$ hanno la stessa distribuzione di probabilità, che indichiamo con $F_e(\cdot)$:

$$F_e(t) = P(V_{e,i} \leq t) \quad , \, t \geq 0$$

NOTA - Le durate di vita sono valori reali non negativi. Dunque le distribuzioni F_e, $e \in \mathcal{E}$, dovranno essere tali che

$$F_e(t) = P(V_{e,i} \leq t) = 0 \quad \text{se } t < 0.$$

Sotto le Assunzioni i) e ii), la nuova struttura di temporizzazione che consideriamo è specificata in maniera completa dall'insieme di distribuzioni di probabilità $F = \{ F_e : e \in \mathcal{E} \}$.

Definizione - La struttura di temporizzazione stocastica associata ad un insieme di eventi $\mathcal{E}$ è un insieme di distribuzioni di probabilità

$$F = \{ F_e : e \in \mathcal{E} \}$$

dove, $\forall e \in \mathcal{E}$, $F_e(\cdot)$ caratterizza la <u>sequenza di temporizzazione stocastica</u>

$$V_e = \{V_{e,1}, V_{e,2}, \dots\}.$$

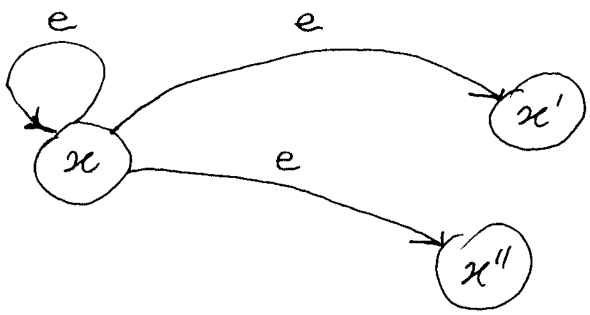
AUTOMI A STATI TEMPORIZZATI STOCASTICI

Oltre alla struttura di temporizzazione stocastica, ci sono due ulteriori caratteristiche aleatorie che possiamo introdurre nella nostra cornice modellistica:

- Lo stato iniziale x_0 può non essere noto in maniera deterministica; esso è modellizzato come una v.a. X_0 della quale è nota la <u>densità di probabilità discreta</u>:

$$p_0(x) = P(X_0 = x) \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

- Le transizioni di stato possono non essere deterministiche:



Dati lo stato corrente $x \in \mathcal{X}$ e l'evento di innesco $e \in \Gamma(x)$, il prossimo stato è una v.a. X' di cui è specificata la probabilità condizionale:

$$p(x' \mid x, e) = P(X' = x' \mid X = x, E = e) \quad \forall x' \in \mathcal{X}$$

→ <u>probabilità di transizione</u>

Ovviamente, se $e \notin \Gamma(x)$, $p(x'|x,e) = 0 \ \forall x' \in \mathcal{X}$.

Definizione - Un automa a stati temporizzato stocastico è una sestupla $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, p, p_0, F)$ dove:

- $\mathcal{E}$, insieme numerabile di eventi
- $\mathcal{X}$, insieme numerabile di stati
- $\forall x \in \mathcal{X}$. $\Gamma(x)$ è l'insieme degli eventi possibili nello stato x
- $p(x'|x,e)$ è una probabilità di transizione dello stato, definita $\forall x', x \in \mathcal{X}$, $e \in \Gamma(x)$.
- $p_0(x)$ è una densità di probabilità dello stato iniziale, definita $\forall x \in \mathcal{X}$.
- $F = \{F_e : e \in \mathcal{E}\}$ è una struttura di temporizzazione stocastica.

Sono quantità aleatorie nell'automa a stati temporizzato stocastico:

- lo stato iniziale e il corrispondente insieme di eventi possibili: X_0, $\Gamma(X_0)$
- le prime durate di vita residue degli eventi: $Y_{e,0}$
- i valori iniziali dei contatori di attivazione degli eventi: $N_{e,0}$

e, posto $k = 1, 2, \ldots$ il contatore del numero di eventi:

- l'evento che innesca la k-esima transizione: E_k
- l'istante di innesco della k-esima transizione: T_k

- lo stato dopo la k-esima transizione: X_k
- le durate di vita residue degli eventi dopo la k-esima transizione: $Y_{e,k}$
- i contatori di attivazione degli eventi dopo la k-esima transizione: $N_{e,k}$

NOTA - L'istante iniziale è assunto deterministicamente noto: $T_0 = t_0$.
Tipicamente, $t_0 = 0$.

Le relazioni tra le suddette v.a. sono di seguito specificate:

inizializzazione

notazione

$X \sim p(x)$ vuol dire che la variabile aleatoria X segue la densità/distribuzione di probabilità $p(x)$.

- $X_0 \sim p_0(x)$
- $\forall e \in \mathcal{E}$.

$$N_{e,0} = \begin{cases} 1 & \text{se } e \in \Gamma(X_0) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- $\forall e \in \mathcal{E}$.
  - $Y_{e,0} = V_{e,1} \sim F_e(t)$ se $e \in \Gamma(X_0)$
  - altrimenti, $Y_{e,0}$ è indefinita.

k-esima transizione $(k = 1, 2, \ldots)$

- $$E_k = \arg \min_{e \in \Gamma(X_{k-1})} Y_{e,k-1}$$

- $T_k = T_{k-1} + Y^*_{k-1}$

  dove $Y^*_{k-1} = \min\limits_{e \in \Gamma(X_{k-1})} Y_{e,k-1}$

- $X_k \sim p(x' | x, e)$ noto $(X_{k-1} = x, E_k = e)$

- $\forall e \in \mathcal{E}.\ N_{e,k} = \begin{cases} N_{e,k-1} + 1 & \text{se } (e \in \Gamma(X_k),\ e = E_k) \\ & \quad \text{oppure } (e \in \Gamma(X_k),\ e \notin \Gamma(X_{k-1})) \\ N_{e,k-1} & \text{altrimenti} \end{cases}$

- $\forall e \in \mathcal{E}.$
  - $Y_{e,k} = V_{e,N_{e,k}} \sim F_e(t)$ se $(e \in \Gamma(X_k),\ e = E_k)$ oppure $(e \in \Gamma(X_k),\ e \notin \Gamma(X_{k-1}))$
  - $Y_{e,k} = Y_{e,k-1} - Y^*_{k-1}$ se $(e \in \Gamma(X_k),\ e \in \Gamma(X_{k-1}) \setminus \{E_k\})$
  - $Y_{e,k}$ è indefinita altrimenti.

Cosa possiamo fare con un automa a stati temporizzato stocastico?

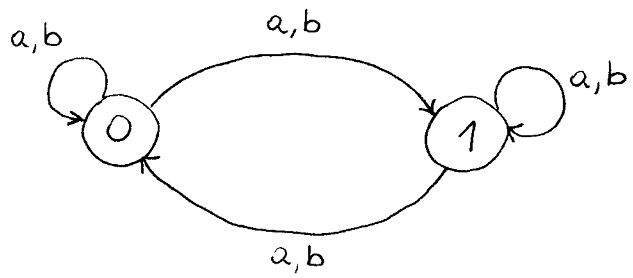
Per esempio, calcolare probabilità assolute: $P(X_k = x),\ x \in \mathcal{X}$.

- Lo strumento fondamentale è la <u>regola della probabilità totale</u>.
- Procedimento complesso, in generale.

Esempio

Automa a stati temporizzato stocastico $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, p, p_0, F)$ con:

- $\mathcal{E} = \{a, b\}$
- $\mathcal{X} = \{0, 1\}$
- Γ specificata dal diagramma di transizione dello stato:



- densità di probabilità dello stato iniziale: $p_0(0)$, $p_0(1) = 1 - p_0(0)$
- probabilità di transizione:

$p(0|0,a)$ $\qquad$ $p(0|0,b)$

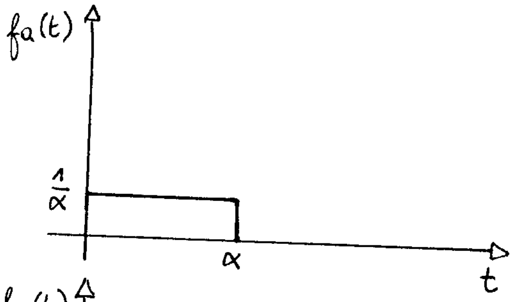
$p(1|0,a) = 1 - p(0|0,a)$ $\qquad$ $p(1|0,b) = 1 - p(0|0,b)$

$p(0|1,a)$ $\qquad$ $p(0|1,b)$

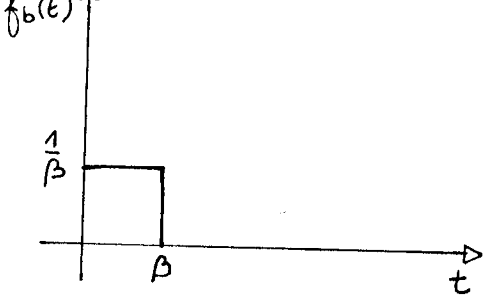
$p(1|1,a) = 1 - p(0|1,a)$ $\qquad$ $p(1|1,b) = 1 - p(0|1,b)$

- struttura di temporizzazione stocastica: $F = \{F_a, F_b\}$, dove F_a e F_b sono distribuzioni di probabilità uniformi, con densità di probabilità f_a e f_b, rispettivamente:

$$f_a(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & \text{se } 0 \leq t \leq \alpha \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



$$f_b(t) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} & \text{se } 0 \leq t \leq \beta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



ipotesi: $0 < \beta < \alpha$

Il nostro obiettivo è calcolare $P(X_k = 0)$, $k = 1,2,3,\dots$
Ovviamente, $P(X_k = 1) = 1 - P(X_k = 0)$.

In questo esempio, il fatto che tutti gli eventi sono possibili in ciascuno stato ci permette di fare delle osservazioni preliminari che semplificano il problema. Innanzi tutto, la sequenza degli eventi è indipendente dalla sequenza degli stati. Infatti, dopo ogni transizione di stato, e indipendentemente dal nuovo stato assunto dopo la transizione, l'evento che è appena accaduto viene sempre di nuovo abilitato, mentre a quello che non è accaduto viene associata la corrispondente durata di vita residua. Segue che anche le sequenze delle durate di vita residue degli eventi sono indipendenti dalla sequenza degli stati.

Per il calcolo di $P(X_1 = 0)$, operiamo come segue:

i) Calcoliamo $P(E_1 = a)$ e $P(E_1 = b)$

In base al meccanismo di selezione del prossimo evento, risulta

$$P(E_1 = a) = P(Y_{a,0} \leq Y_{b,0})$$

indipendentemente dallo stato X_0

Per calcolare la probabilità a secondo membro, occorre conoscere la densità congiunta di $Y_{a,0}$ e $Y_{b,0}$. Tuttavia, all'inizializzazione, $Y_{a,0} = V_{a,1}$ e $Y_{b,0} = V_{b,1}$, con le variabili aleatorie $V_{a,1}$ e $V_{b,1}$ indipendenti per l'Assunzione ii) fatta a pag. 2.

Dunque, anche $Y_{a,0}$ e $Y_{b,0}$ sono indipendenti. Inoltre, $Y_{a,0} \sim f_a(t)$ e $Y_{b,0} \sim f_b(t)$. Risulta:

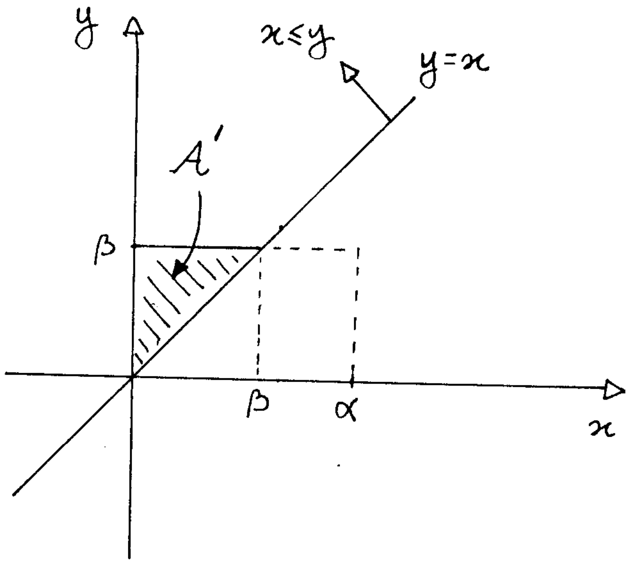
densità congiunta = prodotto delle densità marginali nel caso di v.a. indipendenti.

$$P(Y_{a,0} \leq Y_{b,0}) = \iint_A f_a(x) f_b(y)\, dx\, dy$$

dove $A = \{(x,y) : x \leq y\}$

Risultando $f_a(x)f_b(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha\beta} & \text{se } 0 \le x \le \alpha, 0 \le y \le \beta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$,

possiamo riscrivere:



$$P(Y_{a,0} \le Y_{b,0}) = \iint_{A'} \frac{1}{\alpha\beta}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta} \iint_{A'} dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta} \text{AREA}(A')$$

dove la regione A' è illustrata in figura.

Risulta:

$$\text{AREA}(A') = \frac{\beta^2}{2}$$

e quindi:

$$P(E_1 = a) = P(Y_{a,0} \le Y_{b,0}) = \frac{1}{\alpha\beta} \cdot \frac{\beta^2}{2} = \frac{\beta}{2\alpha}.$$

Ovviamente, $P(E_1 = b) = 1 - P(E_1 = a) = 1 - \dfrac{\beta}{2\alpha}$.

ii) <u>Calcoliamo $P(X_1 = 0)$.</u>

Consideriamo la partizione dell'evento certo:

$$\{X_0 = 0, E_1 = a\} \cup \{X_0 = 0, E_1 = b\} \cup \{X_0 = 1, E_1 = a\} \cup \{X_0 = 1, E_1 = b\}$$

Applicando la <u>regola della probabilità totale</u>, e ricordando che E_1 e X_0 sono <u>indipendenti</u>, abbiamo:

$$P(X_1=0) = P(X_1=0 \mid X_0=0, E_1=a)\, P(X_0=0)\, P(E_1=a)$$
$$+ P(X_1=0 \mid X_0=0, E_1=b)\, P(X_0=0)\, P(E_1=b)$$
$$+ P(X_1=0 \mid X_0=1, E_1=a)\, P(X_0=1)\, P(E_1=a)$$
$$+ P(X_1=0 \mid X_0=1, E_1=b)\, P(X_0=1)\, P(E_1=b)$$
$$= p(0\mid 0,a)\, p_0(0) \frac{\beta}{2\alpha} + p(0\mid 0,b)\, p_0(0) \left(1-\frac{\beta}{2\alpha}\right)$$
$$+ p(0\mid 1,a)\, p_0(1) \frac{\beta}{2\alpha} + p(0\mid 1,b)\, p_0(1) \left(1-\frac{\beta}{2\alpha}\right)$$

Per il calcolo di $P(X_2=0)$, operiamo come segue:

i) <u>Calcoliamo $P(E_2=a)$ e $P(E_2=b)$.</u>

Consideriamo la partizione dell'evento certo $\{E_1=a\} \cup \{E_1=b\}$.
Applicando la <u>regola della probabilità totale</u>, abbiamo:

$$P(E_2=a) = P(E_2=a, E_1=a) + P(E_2=a, E_1=b).$$

Si osservi che:

$$P(E_2=a, E_1=a) = P(Y_{a,1} \le Y_{b,1},\ Y_{a,0} \le Y_{b,0}) =$$

applichiamo il meccanismo di selezione del prossimo evento

$$= P(V_{a,2} \le V_{b,1} - V_{a,1},\ V_{a,1} \le V_{b,1})$$
$$= P(V_{a,1} + V_{a,2} \le V_{b,1},\ V_{a,1} \le V_{b,1})$$
$$= P(V_{a,1} + V_{a,2} \le V_{b,1})$$

<u>nota</u> - Le durate di vita sono valori positivi, dunque $V_{a,1}+V_{a,2} \le V_{b,1}$ implica $V_{a,1} \le V_{b,1}$.

Ricordando che $V_{a,1}$, $V_{a,2}$ e $V_{b,1}$ sono per assunzione indipendenti, la probabilità a ultimo membro si calcola come

$$P(V_{a,1} + V_{a,2} \le V_{b,1}) = \iiint_A f_a(x)\, f_a(y)\, f_b(z)\, dx\,dy\,dz$$

dove $A = \{(x,y,z) : x+y \le z\}$.

Non sviluppiamo i relativi calcoli.

Analogamente,

$$P(E_2=a, E_1=b) = P(Y_{a,1} \leq Y_{b,1}, \ Y_{b,0} \leq Y_{a,0}) =$$

applichiamo il meccanismo di selezione del prossimo evento

$$= P(V_{a,1} - V_{b,1} \leq V_{b,2}, \ V_{b,1} \leq V_{a,1})$$

$$= P(V_{a,1} \leq V_{b,1} + V_{b,2}, \ V_{b,1} \leq V_{a,1})$$

$$= P(V_{b,1} \leq V_{a,1} \leq V_{b,1} + V_{b,2})$$

Ricordando ancora che $V_{a,1}$, $V_{b,1}$ e $V_{b,2}$ sono per assunzione indipendenti, la probabilità a ultimo membro si calcola come

$$P(V_{b,1} \leq V_{a,1} \leq V_{b,1} + V_{b,2}) = \iiint_{\mathcal{A}} f_a(x) f_b(y) f_b(z) \, dx \, dy \, dz$$

$$\text{dove } \mathcal{A} = \{(x,y,z) : y \leq x \leq y+z\}$$

Non sviluppiamo i relativi calcoli.

Ovviamente,

$$P(E_2=b) = 1 - P(E_2=a).$$

ii) <u>Calcoliamo $P(X_2=0)$.</u>

Consideriamo la partizione dell'evento certo

$$\{X_1=0, E_2=a\} \cup \{X_1=0, E_2=b\} \cup \{X_1=1, E_2=a\} \cup \{X_1=1, E_2=b\}$$

e applichiamo la regola della probabilità totale, ricordando che E_2 e X_1 sono indipendenti, in maniera analoga a quanto fatto per il calcolo di $P(X_1=0)$.
Non sviluppiamo i relativi calcoli.

<u>OSSERVAZIONE</u> – Si capisce come la complessità dei calcoli necessari a ricavare $P(X_k=0)$ cresca rapidamente con $k=1,2,\ldots$, pur considerando un automa semplice dove tutti gli eventi sono sempre possibili. La complessità è dovuta primariamente al calcolo delle <u>probabilità relative alle durate di vita residue degli eventi</u>.
Vedremo casi speciali di automi a stati temporizzati stocastici in cui tale calcolo è notevolmente semplificato.