Processi Stocastici

Lezione del 29 ottobre 2007

Definizione - Un processo stocastico è una sequenza temporale di variabili aleatorie $X(t)$, con $t \in T$, dove T rappresenta l'asse dei tempi.

Nel caso in cui T sia un insieme numerabile $\{t_0, t_1, t_2, \dots\}$ il processo stocastico è detto tempo-discreto (e in questo caso, tipicamente, $\{t_0, t_1, t_2, \dots\} = \{0, 1, 2, \dots\}$).

Nel caso in cui $T = \mathbb{R}^+$, è detto tempo-continuo.

numeri reali non negativi

Osservazioni

- Tutte le v.a. $X(t)$, $t \in T$, sono definite sullo stesso spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
- Un processo stocastico può essere visto come un'applicazione

$$X : T \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

  - Fissato $t \in T$, allora $X(t)$ è una variabile aleatoria.
  - Fissato $\omega \in \Omega$, $X(t)$ è una sequenza temporale (realizzazione del processo stocastico), e si indica con $x(t)$.

Un processo stocastico è completamente caratterizzato se sono note le quantità:

$$P\left(X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2, \dots, X(t_k) \le x_k\right) \quad \begin{array}{l} \forall t_1, t_2, \dots, t_k \in T \\ \forall x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R} \\ \forall k = 1, 2, \dots \end{array}$$

cioè, se sono note le funzioni di distribuzione congiunte di tutte le possibili k-uple di variabili aleatorie del processo stocastico.

NOTAZIONE - $E[X(t)] = m_X(t)$ è il valore atteso di $X(t)$.

Definizione - Si definisce funzione di covarianza di un processo stocastico $\{X(t)\}$ la quantità

$$R_X(t,s) = E\Big[\big(X(t) - m_X(t)\big)\big(X(s) - m_X(s)\big)\Big]$$

$$= \begin{cases} \text{varianza di } X(t) & \text{se } s = t \\ \text{covarianza di } X(t) \text{ e } X(s) & \text{se } s \neq t \end{cases}$$

Definizione - Si definisce funzione di covarianza incrociata dei processi stocastici $\{X(t)\}$ e $\{Y(t)\}$ la quantità

$$R_{X,Y}(t,s) = E\Big[\big(X(t) - m_X(t)\big)\big(Y(s) - m_Y(s)\big)\Big]$$

covarianza di $X(t)$ e $Y(s)$

Definizione - Un processo stocastico $\{X(t)\}$ si dice stazionario in senso forte se

$$P\big(X(t_1+\tau) \le x_1, \dots, X(t_k+\tau) \le x_k\big) =$$

$$= P\big(X(t_1) \le x_1, \dots, X(t_k) \le x_k\big)$$

$$\forall \tau,\ \forall t_1, \dots, t_k \in T,\ \forall x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R},\ \forall k = 1, 2, 3, \dots$$

Osservazione - Nel caso di un processo stocastico $\{X(t)\}$ stazionario in senso forte, tutte le v.a. $X(t)$, $t \in T$, sono identicamente distribuite.

Definizione - Un processo stocastico $\{X(t)\}$ si dice stazionario in senso debole se:

- $m_X(t) = m_X(t+\tau)$
- $R_X(t,s) = R_X(t+\tau, s+\tau)$

$\Rightarrow$ m_X e R_X sono invarianti rispetto a traslazione nel tempo.

per ogni τ, e per ogni $t, s \in T$.

Segue che un processo stocastico $\{X(t)\}$ è stazionario in senso debole se e solo se:

- $m_X(t) = m_X \quad \forall t \in T$
- $R_X(t,s) = R_X(t-s) \quad \forall t, s \in T$

$$\Downarrow$$

$$R_X(\tau) = \underbrace{E\left[(X(t+\tau) - m_X)(X(t) - m_X)\right]}_{\text{Indipendente da } t!}$$

Osservazione - $R_X(0) = \sigma_X^2$

Quindi, nel caso di <u>processi stazionari in senso debole</u>, tutte le v.a. $X(t)$, $t \in T$, hanno la stessa media m_X e la stessa varianza σ_X^2, ma in generale potrebbero avere distribuzioni differenti.

<u>Osservazione</u> - stazionarietà forte $\Rightarrow$ stazionarietà debole.
(il viceversa non è vero, in generale)

<u>Definizione</u> - Due processi stocastici $\{X(t)\}$ e $\{Y(t)\}$ si dicono <u>congiuntamente stazionari in senso debole</u> se ciascuno di essi è stazionario in senso debole, e la funzione di covarianza incrociata è invariante rispetto a traslazioni nel tempo, cioè

$$R_{X,Y}(t,s) = R_{X,Y}(t+\tau, s+\tau)$$

per ogni τ, e per ogni $t, s \in T$.

$$\Rightarrow R_{X,Y}(\tau) = E\left[(X(t+\tau)-m_X)(Y(t)-m_Y)\right]$$

<u>Definizione</u> - Un processo stocastico $\{X(t)\}$ si dice <u>indipendente</u> se $X(t_1), \dots, X(t_k)$ sono v.a. indipendenti per ogni $t_1, \dots, t_k \in T$, $k = 2, 3, \dots$

<u>Definizione</u> - Un processo stocastico $\{X(t)\}$ si dice <u>identicamente distribuito</u> se tutte le v.a. $X(t)$, $t \in T$, hanno la stessa distribuzione di probabilità.

$\hookrightarrow$ <u>condizione necessaria</u> per la <u>stazionarietà forte</u>, non per la stazionarietà debole.

Esempio -

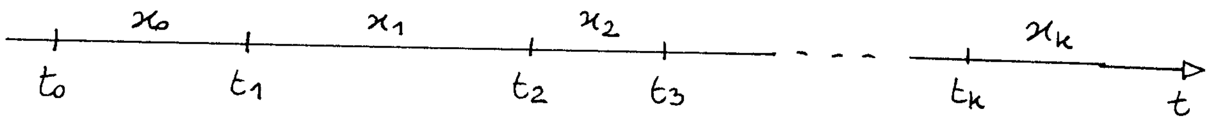
Un processo stocastico $\{X(t)\}$ indipendente e identicamente distribuito e' stazionario in senso debole.

Infatti:

- $m_X(t) = m_X \quad \forall t \in T$, perche' le v.a. $X(t)$, $t \in T$, sono identicamente distribuite
- $R_X(t,t) = var(X(t)) = \sigma_X^2 \quad \forall t \in T$, perche' le v.a. $X(t)$, $t \in T$, sono identicamente distribuite.
- $R_X(t,s) = 0 \quad \forall t,s \in T : t \neq s$, perche' le v.a. $X(t)$ e $X(s)$ sono indipendenti per $t \neq s$.

PROCESSI DI MARKOV

idea: Osserviamo un processo stocastico $\{X(t)\}$ agli istanti $t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_k$, $k = 1, 2, \ldots$



Pensiamo a x_k come lo stato corrente del processo, e a $\{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}\}$ come la sua storia passata osservata.

Considerando gli istanti $t_{k+1}, t_{k+2}, \ldots$ con $t_k < t_{k+1} \leq t_{k+2} \leq \ldots$, le v.a. $X(t_{k+1}), X(t_{k+2}), \ldots$ rappresentano il futuro non noto.

In un processo indipendente tale futuro e' completamente impredicibile sulla scorta dei valori $\{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}\}$ e x_k.

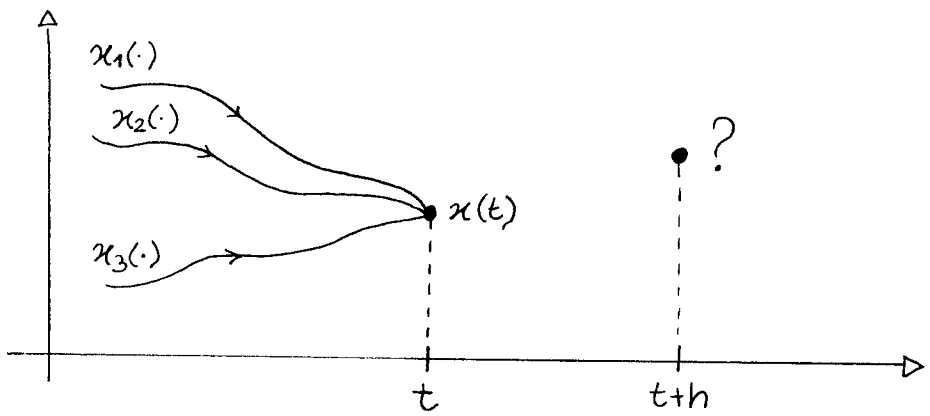
Nei PROCESSI DI MARKOV questa forte proprieta' e' parzialmente rilassata: il futuro e' condizionalmente indipendente dalla storia passata, dato lo stato corrente.

Ciò implica che, per un processo di Markov:

- Tutta la storia passata è riassunta nello stato corrente.
- Non c'è necessità di tenere traccia di tutta la storia passata degli stati.

<u>OSSERVAZIONE</u> - In questa accezione, lo "stato" di un processo di Markov ha propriamente il significato di "stato" che abbiamo introdotto per i sistemi dinamici.

<u>Definizione</u> - Un processo stocastico $\{X(t)\}$ si dice <u>PROCESSO DI MARKOV</u> se $P(X(t+h) \leq x \mid X(s) = x(s)\ \forall s \leq t) = P(X(t+h) \leq x \mid X(t) = x(t))$ $\forall h > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall x(\cdot)$, $\forall t \in T$.



ci basta solo il valore $x(t)$ per predire (in senso probabilistico) il futuro al tempo $t+h$.

Nel caso di processo a <u>stato discreto</u> ($X(t)$ assume valori in un insieme numerabile per ogni $t \in T$) e <u>tempo discreto</u> (cioè $T = \{0, 1, 2, \dots\}$), la precedente proprietà di Markov si riscrive come:

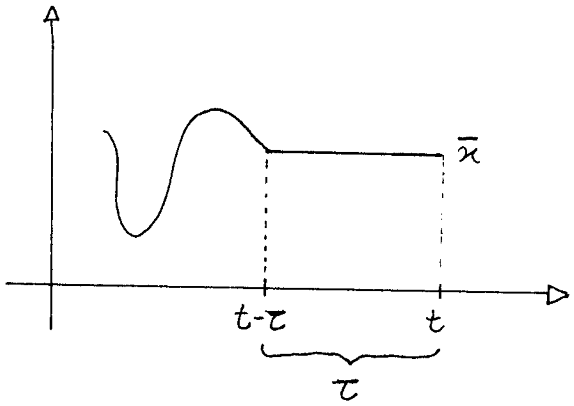
$$P(X_{k+1} = x_{k+1} \mid X_k = x_k, \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0) = P(X_{k+1} = x_{k+1} \mid X_k = x_k).$$

Un processo di Markov è caratterizzato da due aspetti fondamentali:

M1) È irrilevante la <u>traiettoria</u> passata degli stati.

M2) È irrilevante quanto tempo il processo ha trascorso nello stato corrente.

Infatti si supponga che $x(s)=\bar{x}$, $\forall s \in [t-\tau, t]$, $\tau > 0$.



Per la proprietà di Markov risulta:

$$P\left(X(t+h) \leq x \mid X(s)=x(s) \ \forall s \leq t\right) = P\left(X(t+h) \leq x \mid X(t)=\bar{x}\right)$$

indipendentemente da τ (tempo di soggiorno nello stato $\bar{x}$).