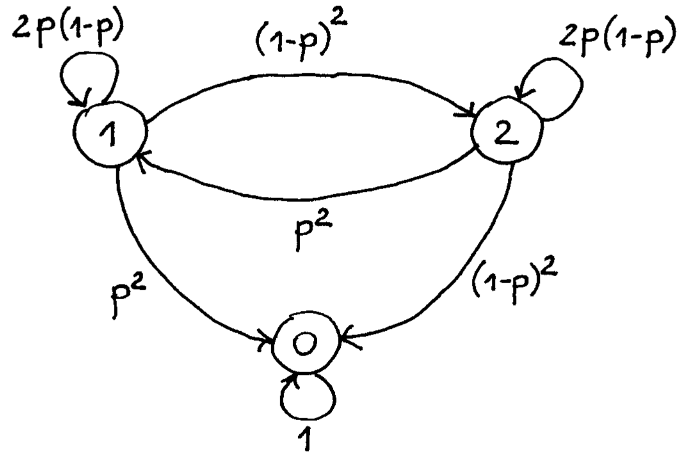
ESERCIZIO 11

$P(\text{testa}) = p = \frac{1}{3}$

$P(\text{croce}) = 1-p = \frac{2}{3}$

1. STATI:

$$x = \begin{cases} 0: \text{gioco terminato} \\ 1: \text{giocatore \#1 ha il turno} \\ 2: \text{giocatore \#2 ha il turno} \end{cases}$$



$$p_{1,0} = P(2\,\text{teste}) = p^2 = \frac{1}{9}$$

$$p_{1,1} = P(1\,\text{testa}, 1\,\text{croce}) = 2 \cdot p(1-p) = \frac{4}{9}$$

$$p_{1,2} = P(2\,\text{croci}) = (1-p)^2 = \frac{4}{9}$$

$$p_{2,0} = P(2\,\text{croci}) = (1-p)^2 = \frac{4}{9}$$

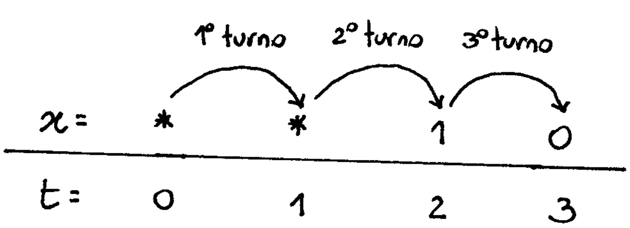
$$p_{2,1} = P(2\,\text{teste}) = p^2 = \frac{1}{9}$$

$$p_{2,2} = P(1\,\text{testa}, 1\,\text{croce}) = 2 \cdot p(1-p) = \frac{4}{9}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p^2 & 2p(1-p) & (1-p)^2 \\ (1-p)^2 & p^2 & 2p(1-p) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

2.



$$\Rightarrow P\big(X(3)=0 \;\underline{e}\; X(2)=1\big) = P\big(X(3)=0 \,|\, X(2)=1\big)\, P\big(X(2)=1\big)$$

$$= p_{1,0} \cdot \pi_1(2)$$

$\pi_1(2)$ è il secondo elemento del vettore $\pi(2) = [\pi_0(2)\ \pi_1(2)\ \pi_2(2)]$,

che si ottiene dalla relazione

$$\pi(2) = \pi(0)\,P^2$$

dove $\pi(0)$, vettore delle probabilità dello stato iniziale, è dato da:

$$\pi(0) = [\,0 \quad p \quad 1-p\,] = [\,0 \quad \tfrac{1}{3} \quad \tfrac{2}{3}\,].$$

(il giocatore che comincia il gioco è sorteggiato lanciando la moneta)

$$P^2 = P \cdot P = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & \frac{20}{81} & * \\ * & \frac{8}{81} & * \end{bmatrix}$$

NOTA - gli * sono valori che non ci interessa calcolare...

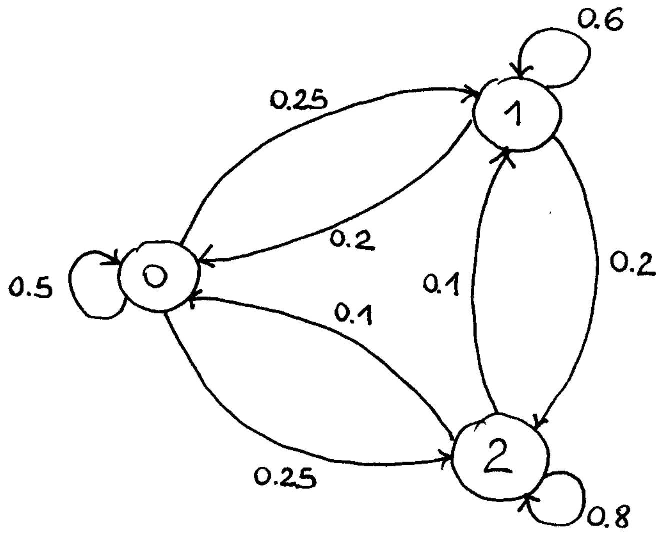
$$\Rightarrow \quad \pi_1(2) = \underbrace{[\,0 \quad \tfrac{1}{3} \quad \tfrac{2}{3}\,]}_{\pi(0)} \underbrace{\begin{bmatrix} * \\ \frac{20}{81} \\ \frac{8}{81} \end{bmatrix}}_{2^a \text{ colonna di } P^2} = \frac{12}{81} = \frac{4}{27} \simeq 0.1481$$

3. $$P(\underbrace{V(2)}_{\text{tempo di soggiorno nello stato 2}} = 4) = (1 - p_{2,2})\, p_{2,2}^3 = \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^3 = \frac{320}{6561} \simeq 0.0488$$

ESERCIZIO 12

1. STATI:

$$x = \begin{cases} 0 & : \text{operaio} \\ 1 & : \text{impiegato} \\ 2 & : \text{professionista} \end{cases}$$



$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$$

2.

	CAPOSTIPITE	FIGLIO	NIPOTE
$t=$	0	1	2

$\Rightarrow \quad P(X(2)=2) = \pi_2(2)$ è la probabilità cercata

$\pi_2(2)$ è il terzo elemento del vettore $\pi(2) = [\,\pi_0(2)\ \pi_1(2)\ \pi_2(2)\,]$,

che si ottiene dalla relazione

$$\pi(2) = \pi(0) P^2,$$

dove $\pi(0)$, vettore delle probabilità dello stato iniziale, è dato da

$\pi(0) = [\,1 \quad 0 \quad 0\,]$ (il capostipite è un operaio)

$$P^2 = P \cdot P = \begin{bmatrix} * & * & 0.3750 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

NOTA- gli $*$ sono valori che non ci interessa calcolare...

$$\Rightarrow \quad \pi_2(2) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\pi(0)} \underbrace{\begin{bmatrix} 0.3750 \\ * \\ * \end{bmatrix}}_{3^a \text{ colonna di } P^2} = 0.3750$$

3. La catena è irriducibile, aperiodica e finita, quindi la distribuzione di probabilità stazionaria esiste, ed è indipendente dalla condizione iniziale.

Quindi, può essere interpretata come la distribuzione a regime delle professioni nel modello sociale considerato (non solo per una singola famiglia)

$$\begin{cases} 0.5\,\pi_0 + 0.2\,\pi_1 + 0.1\,\pi_2 = \pi_0 \\ 0.25\,\pi_0 + 0.6\,\pi_1 + 0.1\,\pi_2 = \pi_1 \\ 0.25\,\pi_0 + 0.2\,\pi_1 + 0.8\,\pi_2 = \pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.25\,\pi_0 - 0.4\,\pi_1 = \pi_0 - \pi_1 & (1^a \text{eq.} - 2^a \text{eq}) \\ \text{———} \\ -0.4\,\pi_1 + 0.7\,\pi_2 = \pi_2 - \pi_1 & (3^a \text{eq.} - 2^a \text{eq.}) \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_0 = \dfrac{0.6}{0.75}\pi_1 = \dfrac{4}{5}\pi_1 \\ \text{———} \\ \pi_2 = \dfrac{0.6}{0.3}\pi_1 = 2\pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

Sostituendo:

$$\frac{4}{5}\pi_1 + \pi_1 + 2\pi_1 = 1$$

$$\frac{19}{5}\pi_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \pi_1 = \frac{5}{19}$$

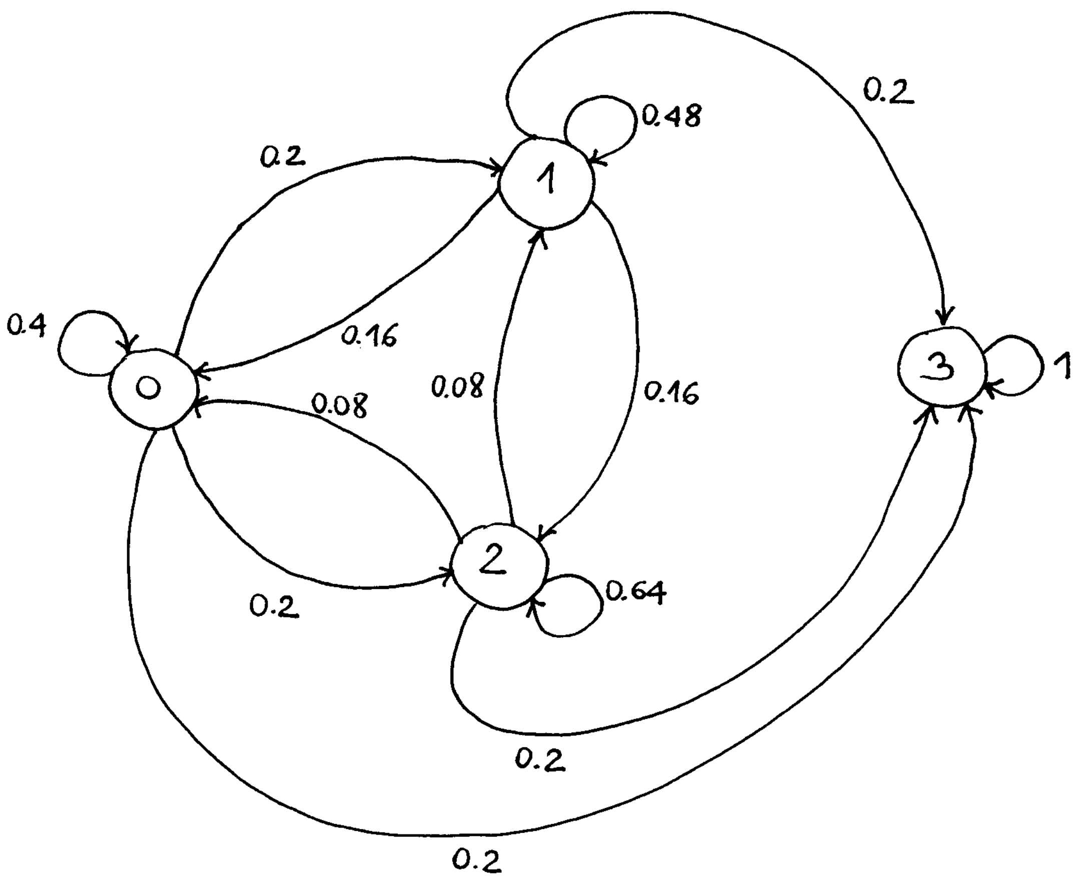
$$\pi_0 = \frac{4}{5}\pi_1 = \frac{4}{19}$$

$$\pi_2 = 2\pi_1 = \frac{10}{19}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\pi}_{\text{distribuzione stazionaria degli stati}} = \begin{bmatrix} \frac{4}{19} & \frac{5}{19} & \frac{10}{19} \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0.2105 & 0.2632 & 0.5263 \end{bmatrix}$$

4. STATI:

$$x = \begin{cases} 0: & \text{operaio} \\ 1: & \text{impiegato} \\ 2: & \text{professionista} \\ 3: & \text{linea ereditaria maschile estinta} \end{cases}$$



$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.16 & 0.48 & 0.16 & 0.2 \\ 0.08 & 0.08 & 0.64 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Si possono ripetere gli stessi passaggi fatti al punto 2.
Si ottiene $\Pi_2(2) \simeq 0.2400$

<u>OSSERVAZIONE</u> - Si osservi che $\Pi_2(2) = 0.3750 \cdot (0.8)^2 \ldots$ Perchè?

caso precedente

6. La catena non è irriducibile a causa di un unico stato assorbente (stato 3).
La distribuzione di probabilità degli stati a regime esiste, è indipendente dalla condizione iniziale, e vale $\Pi = [\,0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1\,]$.
Tuttavia, non può essere interpretata come distribuzione a regime delle professioni nel modello sociale considerato.

Nel lungo periodo si va a finire certamente nello stato 3.

Ci fornisce l'unica informazione che, nel lungo periodo, una linea ereditaria maschile si estingue

ESERCIZIO 13

1. STATI:

$$x = \begin{cases} 0: & M_1 \text{ e } M_2 \text{ entrambe funzionanti} \\ 1: & M_1 \text{ guasta, } M_2 \text{ funzionante} \\ 2: & M_1 \text{ funzionante, } M_2 \text{ guasta} \\ 3: & M_1 \text{ e } M_2 \text{ entrambe guaste} \end{cases}$$

λ_1: tasso di guasto di M_1

$$\frac{1}{\lambda_1} = 10 \text{ giorni} \implies \lambda_1 = \frac{1}{10} \text{ guasti/giorno}$$

λ_2: tasso di guasto di M_2

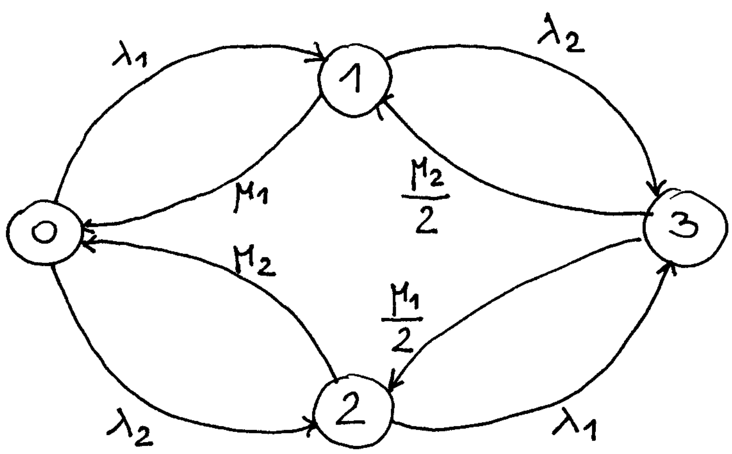
$$\frac{1}{\lambda_2} = 15 \text{ giorni} \implies \lambda_2 = \frac{1}{15} \text{ guasti/giorno}$$

μ_1: tasso di riparazione di M_1

$$\frac{1}{\mu_1} = \frac{1}{2} \text{ giorni} \implies \mu_1 = 2 \text{ riparazioni/giorno}$$

μ_2: tasso di riparazione di M_2

$$\frac{1}{\mu_2} = \frac{3}{4} \text{ giorni} \implies \mu_2 = \frac{4}{3} \text{ riparazioni/giorno}$$



NOTA - Nello stato 3, la risorsa per la riparazione viene equamente assegnata a entrambe le macchine

$\implies$ le durate medie delle riparazioni raddoppiano

$\implies$ i tassi di riparazione si dimezzano

$$Q = \begin{bmatrix} -(\lambda_1+\lambda_2) & \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ \mu_1 & -(\mu_1+\lambda_2) & 0 & \lambda_2 \\ \mu_2 & 0 & -(\lambda_1+\mu_2) & \lambda_1 \\ 0 & \frac{\mu_2}{2} & \frac{\mu_1}{2} & -\frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} & 0 \\ 2 & -\frac{31}{15} & 0 & \frac{1}{15} \\ \frac{4}{3} & 0 & -\frac{43}{30} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

2. $P(V(0) > 5) = e^{q_{0,0} \cdot 5} = e^{-\frac{1}{6} \cdot 5} \simeq 0.4346$

tempo di soggiorno nello stato 0

3. La catena è irriducibile e finita, dunque la distribuzione stazionaria degli stati esiste, è unica, e indipendente dalla condizione iniziale. Si ottiene risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} \pi Q = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases} \qquad \pi = [\pi_0\ \pi_1\ \pi_2\ \pi_3]$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{6}\pi_0 + 2\pi_1 + \frac{4}{3}\pi_2 = 0 \\ \frac{1}{10}\pi_0 - \frac{31}{15}\pi_1 + \frac{2}{3}\pi_3 = 0 \\ \frac{1}{15}\pi_0 - \frac{43}{30}\pi_2 + \pi_3 = 0 \\ \frac{1}{15}\pi_1 + \frac{1}{10}\pi_2 - \frac{5}{3}\pi_3 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

Risolvendo: $\pi = \left[\frac{200}{221}\ \frac{10}{221}\ \frac{10}{221}\ \frac{1}{221} \right]$

$\simeq [0.3050\ \ 0.0452\ \ 0.0452\ \ 0.0046]$

Esercizio 14

1. STATI:

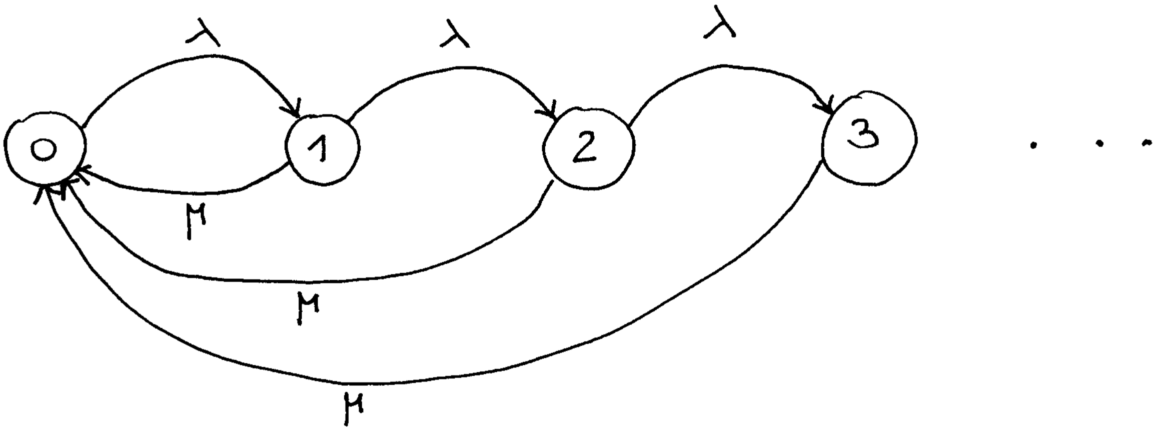
$x \in \{0, 1, 2, \ldots\}$: numero di passeggeri alla fermata

λ: tasso degli arrivi dei passeggeri

$\lambda = 4$ arrivi/min

μ: tasso degli arrivi dei treni

$\frac{1}{\mu} = 5$ min $\Rightarrow$ $\mu = \frac{1}{5} = 0.2$ arrivi/min



$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots \\ \mu & 0 & -(\lambda+\mu) & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

NOTA - Q ha dimensioni infinite

2. La catena e' irriducibile. Tuttavia, avendo infiniti stati, non abbiamo la garanzia che la distribuzione stazionaria degli stati esista: dovremmo verificare che tutti gli stati sono ricorrenti positivi.

Ipotizzando che tutti gli stati sono ricorrenti positivi, impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} \pi Q = 0 \qquad \text{dove } \pi = [\pi_0 \; \pi_1 \; \pi_2 \; \dots] \\ \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1 \end{cases}$$

e verifichiamo se la soluzione esiste ed è unica.

$$\begin{cases} -\lambda \pi_0 + \mu \pi_1 + \mu \pi_2 + \mu \pi_3 + \dots = 0 \\ \lambda \pi_0 - (\lambda+\mu)\pi_1 = 0 \\ \lambda \pi_1 - (\lambda+\mu)\pi_2 = 0 \\ \vdots \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \dots = 1 \end{cases}$$

Prendiamo la prima equazione, e raccogliamo μ a fattor comune:

$$-\lambda \pi_0 + \mu \underbrace{(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \dots)}_{\text{dall'ultima equazione: } 1-\pi_0} = 0$$

$$\Rightarrow \; -\lambda \pi_0 + \mu(1-\pi_0) = 0 \;\Rightarrow\; \pi_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{1}{21}$$

Dalle altre equazioni:

$$\pi_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\pi_0$$

$$\pi_2 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\pi_1 = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2 \pi_0$$

$$\vdots$$

$$\pi_i = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^i \pi_0$$

$$\vdots$$

A questo punto, ottenuti i valori $\{\pi_i\}_{i=0}^{\infty}$, verifichiamo se l'ultimo vincolo è effettivamente soddisfatto (è una serie!)

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^i \pi_0 = \underbrace{\left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^i\right]}_{\substack{\text{serie geometrica} \\ \text{con parametro} \\ \frac{\lambda}{\lambda+\mu} < 1 \\ \Rightarrow \text{ la serie converge!}}} \pi_0 = \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}} \pi_0 = \frac{\lambda+\mu}{\mu} \pi_0 = 1 \,!$$

$\Rightarrow$ Abbiamo dimostrato che la distribuzione stazionaria degli stati esiste

3. $$E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i\pi_i = \sum_{i=0}^{\infty} i \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^i \pi_0 = \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{\infty} i \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{i-1}\right]}_{\frac{d}{d\rho}\left[\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i\right]\Big|_{\rho=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}}} \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \pi_0$$

serie geometrica $= \dfrac{1}{1-\rho}$

$$= \frac{1}{(1-\rho)^2}\Bigg|_{\rho=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}} \cdot \frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}$$

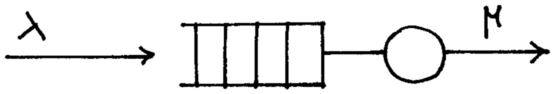
$$= \frac{(\lambda+\mu)^2}{\mu^2} \frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2} = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{\frac{1}{5}} = 20.$$

4. Per la Proprietà PASTA, la probabilità cercata è:

$$\pi_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{1}{21} \simeq 0.0476$$

ESERCIZIO 15

Il sistema può essere modellato come una coda M/M/1:



$\lambda = 1$ processo/sec

Sappiamo che, posto $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$, per una coda M/M/1 esiste la situazione di regime sotto la condizione $\rho < 1$, e quindi nel nostro caso: $\mu > 1$.

vincolo su μ

In tal caso, il tempo medio nel sistema a regime è dato da:

$$E[S] = \frac{1}{\lambda} \, \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Le nostre specifiche richiedono $E[S] \leq 0.5$. Quindi

$$\frac{\frac{1}{\mu}}{1 - \frac{1}{\mu}} \leq 0.5 \iff \frac{1}{\underbrace{\mu - 1}_{>0}} \leq 0.5 \iff 2 \leq \mu - 1 \iff \boxed{\mu \geq 3}$$

Esercizio 16

Il sistema può essere modellato come una coda M/M/1, in cui la linea di trasmissione è il servente.

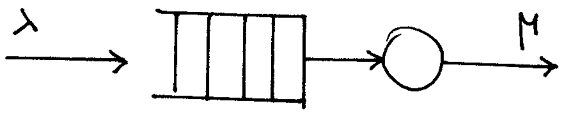
Il tempo di servizio (tempo di trasmissione) relativo a un pacchetto dati di L bit è dato da

$$Z = \frac{L}{c} \quad , \quad \text{dove } c = 1200 \text{ bit/sec}$$

Essendo L una variabile aleatoria esponenziale con tasso $\mu_L = \frac{1}{E[L]} = \frac{1}{600}$, risulta che Z è anch'essa una variabile aleatoria esponenziale.
Infatti:

$$P(Z \le t) = P\left(\frac{L}{c} \le t\right) = P(L \le ct) = 1 - e^{-\mu_L \cdot ct} \quad , \; t \ge 0$$

$\Rightarrow$ Z è esponenziale con tasso $\mu = \mu_L c = \frac{1}{600} \cdot 1200 = 2$ servizi/sec.



La condizione per l'esistenza della situazione di regime è $\frac{\lambda}{\mu} < 1 \Rightarrow \lambda < 2$

vincolo su λ

In tal caso, il tempo medio di attesa nel buffer a regime è dato da:

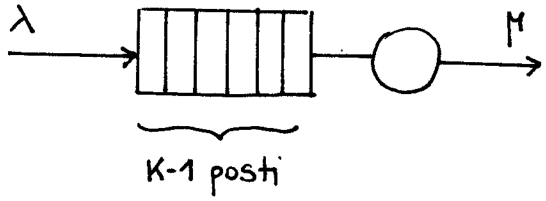
$$E[W] = \frac{1}{\mu} \frac{\rho}{1-\rho} \qquad \text{dove } \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Le nostre specifiche richiedono $E[W] \le 1$. Quindi:

$$\frac{1}{2} \frac{\frac{\lambda}{2}}{1 - \frac{\lambda}{2}} \le 1 \iff \frac{\lambda}{\underbrace{2-\lambda}_{>0}} \le 2 \iff \lambda \le 4 - 2\lambda \iff 3\lambda \le 4 \iff \lambda \le \frac{4}{3}$$

Esercizio 17

Il sistema può essere modellato come una coda M/M/1/K.



$\lambda = 1$ pezzo/min

Le nostre specifiche richiedono che la probabilità a regime che un pezzo in arrivo trovi il sistema saturo $(X = K)$, e quindi venga deviato, sia non superiore a 0.1. Per la Proprietà PASTA, questa probabilità coincide con $\pi_K = P(X=K)$.

$\Rightarrow$ specifica: $\pi_K \leq 0.1$

Nel caso di una coda generica M/M/1/K si dimostra che:

$$\pi_K = \frac{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}$$

Macchina M1

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{0.5} = 2$$

$$\Rightarrow \pi_K = \frac{2^K}{2\cdot 2^K - 1} \leq 0.1 \iff 2^K \leq 0.2\cdot 2^K - 0.1 \iff 0.8\cdot 2^K \leq -0.1$$

<u>mai verificata</u>

$\Rightarrow$ Con la macchina M1 non si può soddisfare la specifica.

Macchina M_2

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{1.2} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \pi_K = \frac{\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^K}{\underbrace{1-\frac{5}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^K}_{\substack{>0 \\ \text{per } K=1,2,3,\ldots}}} \leq \frac{1}{10} \iff \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^K \leq \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\left(\frac{5}{6}\right)^K$$

$$\iff \frac{1}{4}\left(\frac{5}{6}\right)^K \leq \frac{1}{10} \iff \left(\frac{5}{6}\right)^K \leq \frac{2}{5} \iff K \ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$\iff K \geq \frac{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \simeq 5.0256 \Rightarrow K_{min} = 6$$

COSTO: $\underbrace{300}_{\text{costo di } M_2} + \overset{K_{min}-1}{5} \cdot 80 = 700 \text{ K€}$

costo dello spazio di accodamento

Macchina M_3

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \pi_K = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^K}{1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^K} \leq \frac{1}{10} \iff \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^K \leq \frac{1}{10} - \frac{1}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^K$$

$$\iff \frac{11}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^K \leq \frac{1}{10} \iff \left(\frac{1}{2}\right)^K \leq \frac{2}{11} \iff K \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq \ln\left(\frac{2}{11}\right)$$

$$\iff K \geq \frac{\ln\left(\frac{2}{11}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \simeq 2.4594 \Rightarrow K_{min} = 3$$

COSTO: $500 + 2 \cdot 80 = 660 \text{ K€}$

$\Rightarrow$ <u>Scegliamo M_3 con $K=3$</u> (risparmio = 40 K€)