A.A. 2008/09

Esercizi di Sistemi ad Eventi Discreti

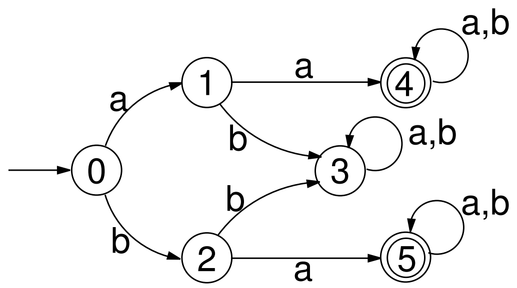
versione del 28/11/2008

Prima parte

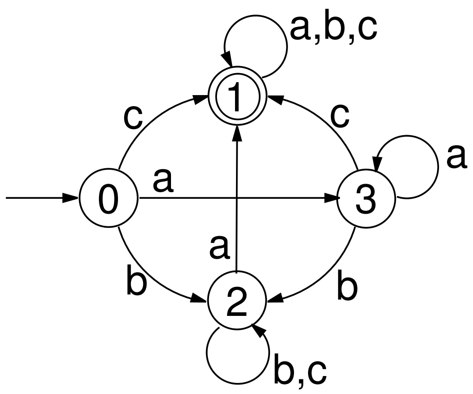
Esercizio 1

Dati i seguenti automi a stati finiti, se ne determini un automa equivalente con il minor numero di stati:

1.



2.



Esercizio 2
Dato l'automa a stati finiti $(\mathscr{E}, \mathscr{X}, f, x_0, \mathscr{F})$, dove:

- $\mathscr{E} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$
- $\mathscr{X} = \{0, 1, 2, 3\}$
- $f(0,\alpha) = 3,\ f(0,\beta) = 1,\ f(0,\gamma) = 2,\ f(1,\alpha) = 1,\ f(1,\beta) = 0,\ f(1,\gamma) = 3,$ $f(2,\alpha) = 3,\ f(2,\beta) = 1,\ f(2,\gamma) = 2,\ f(3,\alpha) = 1,\ f(3,\beta) = 3,\ f(3,\gamma) = 0$
- $x_0 = 0$
- $\mathscr{F} = \{3\}$

si determini un automa equivalente con il minor numero di stati.

Esercizio 3
Dato l'automa a stati temporizzato $(\mathscr{E}, \mathscr{X}, \Gamma, f, x_0, V)$, dove:

- $\mathscr{E} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$
- $\mathscr{X} = \{0, 1, 2, 3\}$
- $\Gamma(0) = \{\alpha, \gamma\}$, $\Gamma(1) = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\Gamma(2) = \{\beta, \gamma\}$, $\Gamma(3) = \{\alpha, \beta\}$
- $f(0,\alpha) = 3,\ f(0,\gamma) = 2,\ f(1,\alpha) = 1,\ f(1,\beta) = 0,\ f(1,\gamma) = 3,\ f(2,\beta) = 1,$ $f(2,\gamma) = 2,\ f(3,\alpha) = 1,\ f(3,\beta) = 3$
- $x_0 = 0$
- $V = \{v_\alpha, v_\beta, v_\gamma\}$, con
  $v_\alpha = \{1.3, 0.6, 0.8, 1.5\}$, $v_\beta = \{0.8, 0.9, 1.2, 1.0\}$, $v_\gamma = \{1.2, 1.4, 1.3, 1.0\}$

si risponda ai seguenti quesiti:

1. Dare una rappresentazione grafica del sistema.
2. Determinare lo stato del sistema all'istante $t = 4.6$.

3. Determinare il tempo di soggiorno totale del sistema in ciascuno stato durante l'intervallo di tempo $[0, 4.7]$.

Esercizio 4
Dato l'automa a stati temporizzato $(\mathscr{E}, \mathscr{X}, \Gamma, f, x_0, V)$, dove:

- $\mathscr{E} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$
- $\mathscr{X} = \{0, 1, 2, 3\}$
- $\Gamma(0) = \Gamma(2) = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\Gamma(1) = \{\alpha, \gamma\}$, $\Gamma(3) = \{\alpha, \beta\}$
- $f(0, \alpha) = 3$, $f(0, \beta) = 0$, $f(0, \gamma) = 2$, $f(1, \alpha) = 1$, $f(1, \gamma) = 3$, $f(2, \alpha) = 1$, $f(2, \beta) = 3$, $f(2, \gamma) = 2$, $f(3, \alpha) = 1$, $f(3, \beta) = 0$
- $x_0 = 0$
- $V = \{v_\alpha, v_\beta, v_\gamma\}$, con
  $v_\alpha = \{1.1, 0.7, 1.4, 0.8\}$, $v_\beta = \{1.2, 0.8, 0.3, 1.2\}$, $v_\gamma = \{0.8, 1.2, 0.3, 0.8\}$

si risponda ai seguenti quesiti:

1. Dare una rappresentazione grafica del sistema.
2. Determinare lo stato del sistema all'istante $t = 3.8$.
3. Determinare il tempo di soggiorno totale del sistema in ciascuno stato durante l'intervallo di tempo $[0, 3.9]$.

Esercizio 5
Dato l'automa a stati temporizzato $(\mathscr{E}, \mathscr{X}, \Gamma, f, x_0, V)$, dove:

- $\mathscr{E} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$
- $\mathscr{X} = \{0, 1, 2\}$
- $\Gamma(0) = \{\alpha, \beta\}$, $\Gamma(1) = \{\alpha, \gamma\}$, $\Gamma(2) = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

- $f(0,\alpha)=1$, $f(0,\beta)=2$, $f(1,\alpha)=2$, $f(1,\gamma)=0$, $f(2,\alpha)=1$, $f(2,\beta)=0$, $f(2,\gamma)=2$
- $x_0 =$ qualsiasi
- $V=\{v_\alpha, v_\beta, v_\gamma\}$, con
  $v_\alpha=\{1.0,1.5,1.5,0.5\}$, $v_\beta=\{2.0,0.5,1.5,1.0\}$, $v_\gamma=\{1.5,0.5,0.5,1.0\}$

si risponda ai seguenti quesiti:

1. Determinare lo stato del sistema all'istante $t=3.2$, assumendo $x_0=0$.
2. Ripetere il quesito del punto precedente, assumendo $x_0=1$.

Esercizio 6
Uno sportello Bancomat viene attivato ogni mattina con una disponibilità di 1000 Euro in banconote da 100 Euro. I clienti che arrivano allo sportello possono richiedere contante solo nelle quantità di 100 Euro e 200 Euro. I clienti che richiedono 100 Euro e 200 Euro arrivano allo sportello come generati da processi di Poisson indipendenti con frequenza media 0.1 arrivi/minuto e 0.05 arrivi/minuto, rispettivamente. Si assume istantanea la durata del servizio di ciascun cliente.

1. Fornire una descrizione formale del sistema come un automa a stati temporizzato stocastico $(\mathscr{E},\mathscr{X},\Gamma,f,x_0,F)$.
2. Calcolare la probabilità che, dopo il servizio di 3 clienti, la disponibilità residua nel bancomat sia di 600 Euro.
3. Calcolare la probabilità che, 2 ore dopo l'attivazione, la disponibilità residua nel bancomat sia di 800 Euro.
4. Supponendo che arrivino solo clienti che richiedono 200 Euro, calcolare entro quanto tempo mediamente il bancomat esaurisce la disponibilità.

Esercizio 7
Alla cassa di un supermercato accedono clienti con carrello e con cestino. I clienti

con carrello e con cestino arrivano come generati da processi di Poisson con tempi medi di interarrivo uguali a 5 minuti e 2 minuti, rispettivamente. I servizi alla cassa dei clienti con carrello e con cestino hanno durate che seguono distribuzioni esponenziali con tassi 0.4 servizi/minuto e 0.75 servizi/minuto, rispettivamente. Per problemi di spazio, al massimo 3 clienti (incluso quello che viene servito) possono mettersi in coda alla cassa. Al fine di velocizzare il servizio, la direzione del supermercato decide che, dopo il servizio alla cassa di un cliente con carrello, si dia la precedenza a un cliente con cestino, se questo è già in coda.

1. Fornire una descrizione formale del sistema come un automa a stati temporizzato stocastico $(\mathscr{E},\mathscr{X},\Gamma,f,x_0,F)$.

2. Calcolare il tempo medio che un cliente con carrello che ha appena dovuto lasciare la precedenza a uno con cestino, deve ulteriormente aspettare prima di lasciare il supermercato.

3. Calcolare la probabilità che almeno due clienti debbano mettersi in coda a un'altra cassa perché la cassa considerata non ha posto in coda e il cliente servito è con carrello.

Esercizio 8

Una stazione di lavorazione in un'industria manifatturiera produce un prodotto finito a partire da due prodotti di base (uno di tipo "1" e l'altro di tipo "2"). I pezzi di tipo 1 vengono preparati per l'assemblaggio in una macchina M_1 priva di spazio di accodamento, mentre i pezzi di tipo 2 vengono preparati per l'assemblaggio in una macchina M_2, anch'essa priva di spazio di accodamento. Terminata la preparazione di un pezzo, ciascuna macchina trattiene il pezzo preparato fino a quando anche nell'altra macchina c'è un pezzo preparato. A quel punto, i due pezzi preparati vengono inviati alla macchina assemblatrice A, se questa è libera. Altrimenti, M_1 e M_2 trattengono il rispettivo pezzo (situazione di blocco) fino a quando A è libera. Si suppone che i pezzi di tipo 1 e di tipo 2 arrivino come generati da processi di Poisson con tassi 1 arrivo/minuto e 1.5 arrivi/minuto, rispettivamente. Le durate delle lavorazioni nelle macchine M_1 e M_2 seguono distribuzioni esponenziali con tassi 0.75 lavorazioni/minuto e 0.5 lavorazioni/minuto, rispettivamente, mentre il tempo di assemblaggio nella macchina A segue una distribuzione esponenziale con tasso 0.2 assemblaggi/minuto.

1. Dare una definizione degli eventi e dello stato del sistema. A quale stato corrisponde la situazione di blocco?

2. Calcolare il tempo medio di attesa in una situazione di blocco.

3. Calcolare la probabilità che un pezzo di tipo 1 sia pronto prima che arrivi un pezzo di tipo 2, partendo da una situazione in cui le macchine M_1 e M_2 sono entrambe libere.

4. Calcolare la probabilità di raggiungere lo situazione di blocco a partire da una situazione in cui le macchine M_1 e M_2 sono libere e la macchina A è occupata.

Esercizio 9

Un ristorante self-service è organizzato nel modo seguente. I clienti in arrivo si mettono in coda per ritirare lo scontrino alle casse, quindi si mettono in una ulteriore coda per ritirare le pietanze. I clienti arrivano come generati da un processo di Poisson con tasso 0.6 arrivi/minuto. Sono presenti due casse, alle quali si accede attraverso un'unica coda. Il tempo di servizio alle casse segue una distribuzione esponenziale con durata media di 1 minuto. Le pietanze sono di regola servite da un solo operatore. Tuttavia, quando la coda per il ritiro delle pietanze supera i 3 clienti, una delle due casse viene chiusa, e l'operatore alla cassa chiusa si sposta a servire le pietanze. Il tempo di servizio delle pietanze segue una distribuzione esponenziale con tasso 0.4 servizi/minuto. Quando il numero di clienti in coda per il ritiro delle pietanze ritorna inferiore a 4, un operatore ritorna alla cassa.

1. Dare una definizione degli eventi e dello stato del sistema.

2. Calcolare la probabilità che il prossimo evento sia un servizio alle casse in una situazione in cui ci sono un cliente alle casse e due clienti al ristorante.

3. Determinare la distribuzione di probabilità del tempo di soggiorno in una situazione in cui ci sono tre clienti alle casse e due clienti al ristorante.

4. Calcolare la probabilità che un cliente venga servito alle casse prima che un cliente sia servito al ristorante in una situazione in cui due clienti sono alle casse e cinque clienti sono al ristorante.

Esercizio 10

Un piccolo autobus che effettua servizio navetta dall'aeroporto alla stazione ferroviaria, ha la capacità di 5 posti a sedere e 10 posti in piedi. I passeggeri a sedere possono avere solo bagaglio a mano, mentre i passeggeri in piedi possono avere al massimo un bagaglio da stiva che devono tenere ben saldo accanto a sé per motivi di sicurezza durante il tragitto. I passeggeri con solo bagaglio a mano occupano prima tutti i posti a sedere, e poi eventualmente i posti in piedi. Si assume che un bagaglio da stiva occupi lo spazio di una ulteriore persona. L'autobus parte quando tutti i posti sono occupati. I passeggeri con bagaglio a mano e con bagaglio a stiva arrivano come generati da processi di Poisson con tassi 1 arrivo/minuto e 0.8 arrivi/minuto, rispettivamente.

1. Fornire una descrizione formale del sistema come un automa a stati temporizzato stocastico $(\mathscr{E}, \mathscr{X}, \Gamma, f, x_0, F)$.

2. Calcolare la probabilità che i posti a sedere si esauriscano entro 4 minuti.

3. Calcolare la probabilità che esattamente un passeggero con bagaglio da stiva non venga accettato sull'autobus prima della partenza, essendo rimasto un solo posto disponibile e in piedi.

Seconda parte

Esercizio 11

Due giocatori giocano lanciando una moneta. La moneta è truccata: la probabilità di ottenere testa è infatti $p = \frac{1}{3}$. Al proprio turno, ciascun giocatore lancia due volte la moneta:

- il giocatore 1 vince con due teste, mantiene il turno con una testa e una croce, passa il turno al giocatore 2 con due croci;
- il giocatore 2 vince con due croci, mantiene il turno con una testa e una croce, passa il turno al giocatore 1 con due teste.

1. Mostrare che il gioco può essere modellato come una catena di Markov a tempo discreto.
   Suggerimento. Modellare la vittoria di ciascun giocatore come la transizione verso uno stato assorbente.
2. Calcolare la probabilità che il giocatore 1 vinca al terzo turno, noto che il giocatore che comincia il gioco viene selezionato lanciando la moneta: se esce testa, comincia il giocatore 1; se esce croce, comincia il giocatore 2.
3. Calcolare la probabilità che il giocatore 2 abbia il turno per esattamente quattro volte consecutive.

Esercizio 12

Un semplice modello sociologico assume che le professioni maschili possano essere classificate come *professionista*, *impiegato* e *operaio*. Il modello assume, inoltre, che i figli maschi dei professionisti diventino per il 10% impiegati e per il 10% operai; i figli maschi di impiegati diventino per il 20% professionisti e per il 20% operai; e i figli maschi degli operai diventino per il 25% professionisti e per il 25% impiegati.

Si assuma che ogni uomo abbia almeno un figlio maschio.

1. Costruire una catena di Markov a tempo discreto che, dato un capostipite, modelli la dinamica delle professioni con le generazioni, considerando a ogni generazione il generico figlio maschio.

2. Calcolare la probabilità che un nipote di un capostipite operaio sia un professionista.

3. Calcolare, se esiste, la distribuzione di probabilità delle professioni a regime nel modello sociale considerato.

Si assuma che la probabilità che un uomo abbia almeno un figlio maschio sia 0.8. Se un uomo non ha figli maschi, la sua linea ereditaria maschile si estingue.

4. Costruire una catena di Markov a tempo discreto che modelli la nuova situazione.

5. Calcolare la probabilità del punto $2)$ per il nuovo modello.

6. Come cambia la risposta al punto $3)$ per il nuovo modello?

Esercizio 13
Un sistema di produzione è costituito da due macchine M_1 e M_2, e da una risorsa R per la loro riparazione. Il modello dei guasti delle due macchine è di tipo esponenziale, con tempo medio di guasto 10 giorni per M_1 e 15 giorni per M_2. I tempi di riparazione di M_1 e M_2 seguono distribuzioni esponenziali con durate medie 12 ore e 18 ore, rispettivamente. Quando entrambe le macchine sono guaste, la risorsa per la riparazione viene equamente assegnata ad entrambe le macchine (questo implica che le durate medie delle riparazioni raddoppiano...).

1. Mostrare che il modello guasti/riparazioni è una catena di Markov a tempo continuo.

2. Calcolare la probabilità che le macchine siano entrambe funzionanti per almeno 5 giorni consecutivi.

3. Calcolare, se esiste, la probabilità a regime di tutti gli stati.

Esercizio 14

A una fermata della metropolitana, i passeggeri arrivano secondo un processo di Poisson con frequenza 4 arrivi/min, mentre i treni transitano mediamente ogni 5 minuti anch'essi secondo un processo di Poisson. Si fa l'ipotesi che tutti i passeggeri che si trovano alla fermata riescano a salire sul treno.

1. Mostrare che il sistema può essere modellato come una catena di Markov a tempo continuo con numero infinito di stati.

2. Dimostrare se esiste la distribuzione stazionaria degli stati.

3. In caso di risposta affermativa alla precedente domanda, calcolare il numero medio di passeggeri che, a regime, sale su ogni treno.

4. Calcolare la probabilità a regime che, all'arrivo di un treno, la fermata sia vuota (cioè non ci siano passeggeri in attesa).

Esercizio 15

Sotto l'ipotesi di processo di Poisson degli arrivi, durate di servizio esponenziali, e buffer di capacità infinita, dimensionare la frequenza di servizio μ di un sistema di elaborazione che riceve processi da elaborare con frequenza media $\lambda = 1$ processo/sec, in maniera che il tempo medio nel sistema non ecceda a regime 0.5 sec.

Esercizio 16

Una linea di trasmissione trasmette dati con velocità costante $c = 1200$ bit/sec. Un pacchetto dati è formato da L bit, dove L è una variabile aleatoria con distribuzione esponenziale e valore atteso $E[L] = 600$ bit. Ipotizzando che i pacchetti dati arrivino come generati da un processo di Poisson, e che la linea di trasmissione sia preceduta da un buffer di capacità infinita, determinare la frequenza massima λ di pacchetti dati in arrivo tale da garantire un tempo medio a regime di attesa nel buffer inferiore a 1 sec.

Esercizio 17

Si intende progettare una stazione di lavorazione che consiste in una singola macchina e uno spazio di capacità finita per l'accodamento dei pezzi da lavorare. La specifica di progetto richiede che, a regime, non più del 10% dei pezzi in arrivo siano deviati verso un'altra macchina perché non c'è spazio in coda. Si ipotizza che i pezzi arrivino come generati da un processo di Poisson con parametro $\lambda = 1$ pezzo/min. Per quanto riguarda le durate delle lavorazioni, è noto che seguono una distribuzione esponenziale con tasso μ dipendente dalla tipologia di macchina scelta (si riporta anche il costo per l'acquisto di ciascuna macchina):

- M_1: $\mu = 0.5$ pezzi/min, costo 100 KEuro;
- M_2: $\mu = 1.2$ pezzi/min, costo 300 KEuro;
- M_3: $\mu = 2.0$ pezzi/min, costo 500 KEuro.

In aggiunta, ciascuna unità di spazio di accodamento ha un costo di 80 KEuro.

1. Scegliere la macchina e la capacità della stazione di lavorazione con l'obiettivo di minimizzare i costi e soddisfare la specifica di progetto.
   Suggerimento. Calcolare la quantità $\pi_K = P(X = K)$, dove X indica il numero di pezzi nel sistema, per una generica coda di servizio $M/M/1/K$, e applicare la proprietà PASTA.