Esercitazione di Sistemi ad Eventi Discreti - 09.12.2011

NOTA: per esercitarsi, si veda anche l'esercitazione svolta del 12/01/2010, disponibile all'indirizzo `http://www.dii.unisi.it/~paoletti/teaching/sed/0910` sotto la voce 'Programma e note delle lezioni'.

Esercizio 1

Gli alberi di una foresta protetta ricadono in quattro gruppi di età: 0 (da 0 a 14 anni); 1 (da 15 a 29 anni); 2 (da 30 a 44 anni); 3 (da 45 anni in poi). La strategia di rimboschimento della foresta prevede di monitorare la popolazione di alberi a intervalli di 15 anni. In ciascun intervallo, una certa percentuale di individui in ciascun gruppo muore. Tutti gli alberi morti vengono rimpiazzati con alberi nel gruppo 0 in modo da ripristinare il numero iniziale. Siano $p_0 = 10\%$, $p_1 = 20\%$, $p_2 = 30\%$ e $p_3 = 40\%$ le percentuali di individui che muoiono in ciascun gruppo.

1. Modellizzare il processo di invecchiamento e rimboschimento della foresta mediante una catena di Markov omogenea a tempo discreto, definendo come stato $X(t)$ della catena il gruppo di età a cui appartiene un generico individuo nel t-esimo intervallo di 15 anni. Si osservi che strategia di rimboschimento consente di far "ricomparire" un albero morto nella classe 0, all'intervallo successivo, sotto forma di un nuovo albero.

2. Calcolare la probabilità che un individuo muoia a un'età compresa tra 75 e 89 anni.

3. Determinare la frazione di individui a regime in ciascun gruppo di età.

4. Calcolare quanto vive in media un albero, considerando che, nel modello definito al punto 1, la vita di un generico individuo inizia e termina nello stato 0.

Esercizio 2

Un nodo di comunicazione riceve messaggi costituiti da sequenze di byte. La lunghezza L di un generico messaggio (in Kbyte) è una variabile aleatoria geometrica con parametro $q = 2/3$, ossia $P(L = n) = (1 - q)^{n-1}q$, $n = 1, 2, \ldots$. Il nodo dispone di un buffer che può contenere al più due messaggi in attesa di trasmissione (indipendentemente dalla loro lunghezza), e trasmette su una linea dedicata con capacità di canale costante pari a 1000 Kbyte/s. Nel periodo di tempo necessario a trasmettere un singolo Kbyte, può arrivare al nodo al più un nuovo messaggio con probabilità $p = 3/5$. Se il buffer è pieno, il messaggio in arrivo viene rifiutato. Si assume che inizialmente il sistema (nodo + linea di trasmissione) sia vuoto.

1. Calcolare la probabilità che dopo 5 ms dall'istante iniziale, ci siano due messaggi nel sistema, di cui uno in trasmissione e l'altro in attesa di trasmissione.

2. Calcolare il numero medio a regime di messaggi nel sistema.

Esercizio 3

Un team di robot è composto da un leader (identificato con 0) e tre follower (identificati con 1, 2 e 3). I quattro robot si scambiano informazioni sulla loro posizione al fine di portarsi in formazione. La comunicazione avviene nel modo seguente. Il leader invia la sua posizione al follower 1; il follower 1, ricevuta la posizione del leader, integra il pacchetto di informazione con la propria posizione e la invia al follower 2 (con probabilità p) o al follower 3, ma non ad entrambi. Il follower 2 o 3 integra a sua volta il pacchetto di informazione con la propria posizione e la rimanda al leader. Il leader non invia di nuovo la propria posizione fino a quando non ha ricevuto l'informazione fornita dal follower 2 o 3. Si assume che la trasmissione del pacchetto di informazione da un robot all'altro avvenga in un intervallo di durata $T = 5$ ms.

1. Calcolare la probabilità che negli 0.5 s successivi all'avvio della comunicazione il leader non riceva alcuna informazione sulla posizione del follower 2.

2. Calcolare la probabilità che esattamente dopo 0.4 s dall'avvio della comunicazione il pacchetto di informazione sia in possesso del follower 2.

Esercizio 4

Una CPU è formata da due processori identici in parallelo. Durante un intervallo di *clock*, può arrivare alla CPU al più un nuovo *job* per l'esecuzione[1], e questo avviene con probabilità α. Se almeno un processore è libero, il job viene eseguito, altrimenti viene perso. Quando un processore è occupato, la probabilità che esso termini il job in esecuzione è β in ciascun intervallo di clock.

1. Posto $\alpha = 1/2$, determinare il valore di β tale che il tempo medio di ricorrenza degli stati con un solo processore occupato e con due processori occupati sia identico.

2. Con i valori di α e β del punto 2, calcolare la probabilità che entrambi i processori rimangano contemporaneamente occupati per almeno 10 intervalli di clock.

[1] *Suggerimento:* si intenda, per chiarezza, che l'arrivo di un nuovo job avviene al termine dell'intervallo di clock.