Esercitazione di Sistemi ad Eventi Discreti - 28.10.2011

Esercizio 1

Si consideri la stazione di lavorazione rappresentata in Figura 1, composta da due macchine M_1 e M_2 e priva di spazio di accodamento.

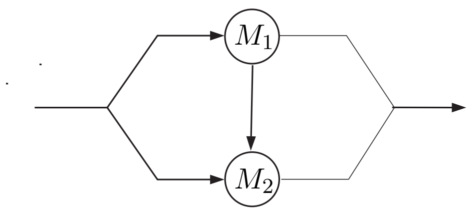


Figura 1: Stazione di lavorazione.

La macchina M_1 è più veloce della macchina M_2 (una lavorazione in M_1 richiede 15 min, mentre una lavorazione in M_2 richiede un'ora), ma mentre M_2 ha un'affidabilità del 100%, M_1 ha un'affidabilità solo dell'80% (cioè il 20% delle lavorazioni non viene terminata con successo). Nel caso in cui M_1 termini una lavorazione senza successo, il pezzo viene inviato per la rilavorazione a M_2, se questa è disponibile. Altrimenti, M_1 trattiene il pezzo fino a quando M_2 si libera. Un pezzo in arrivo quando sia M_1 che M_2 sono libere, viene indirizzato verso M_1 con probabilità $p = 2/3$, mentre quando sia M_1 che M_2 sono occupate, il pezzo in arrivo viene scartato.

1. Supponendo che la stazione di lavorazione sia inizialmente vuota, e che i pezzi arrivino a intervalli costanti di durata t_a, determinare la condizione su t_a affinché sia non nulla la probabilità che dopo il secondo evento M_1 sia libera e M_2 sia operativa. Quanto vale tale probabilità?

Esercizio 2

Uno sportello clienti che dispone di un solo addetto e di una sala di attesa con 5 posti, apre alle ore 9:00, ma la porta della sala di attesa viene aperta già alle 8:30. I clienti arrivano come generati da un processo di Poisson con tasso $\lambda = 4$ arrivi/ora, mentre il tempo di servizio allo sportello segue una distribuzione uniforme nell'intervallo [10,30] minuti.

1. Modellizzare il sistema descritto a partire dall'apertura dello sportello mediante un automa a stati stocastico, di cui si chiede di specificare tutti gli elementi della sestupla.

2. Calcolare la probabilità che il secondo cliente in arrivo dopo l'apertura dello sportello trovi almeno un posto libero in sala di attesa.

Esercizio 3

Il sistema di allarme di un appartamento è dotato di un tastierino numerico situato all'ingresso. Il tastierino serve a digitare un codice di sicurezza di tre cifre. Quando l'allarme è attivo, e viene aperta la porta di ingresso dall'esterno, parte un timer T_1 di 30 secondi. Se il codice corretto non viene digitato entro lo scadere di T_1, scatta l'allarme. Come ulteriore sicurezza, all'apertura della porta e ogni volta che viene digitata una cifra, parte un timer T_2 di 5 secondi. Se nessuna cifra viene digitata prima dello scadere di T_2, il sistema annulla l'eventuale sequenza fino ad allora inserita, e si rimette in attesa del codice completo (*reset*), facendo ripartire il timer T_2. Il *reset* viene anche effettuato quando viene inserita una cifra errata. Quando viene completato il codice corretto, l'allarme viene disattivato. Si assuma che il tempo che impiega l'utente a pensare e digitare una cifra segua una distribuzione uniforme nell'intervallo $[3, 6]$ secondi. Si assuma inoltre che, a ogni inserimento, sia $p = 3/4$ la probabilità di aver digitato la cifra corretta nella sequenza.

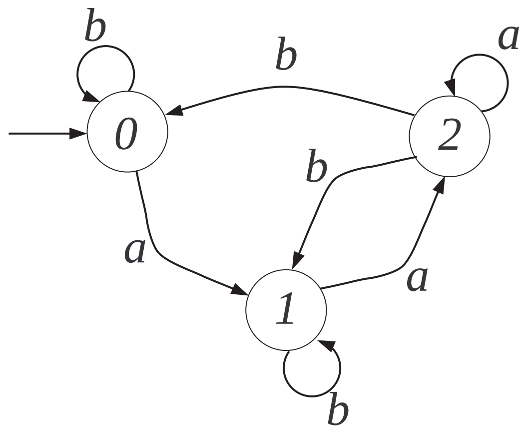
1. Costruire un automa a stati temporizzato stocastico per il sistema descritto.

2. Calcolare la probabilità che l'utente disattivi l'allarme digitando solo tre cifre.

Esercizio 4

Si consideri l'automa a stati stocastico $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, p, x_0, F)$ rappresentato in figura, con $\mathcal{E} = \{a, b\}$ e $p(0|2, b) = 1/4$. L'evento a è caratterizzato da durate di vita deterministiche $V_a = 1.2$, mentre

$$F_b(t) = P(V_b \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 1.0 \\ 8(t-1)^2 & \text{se } 1.0 \leq t < 1.25 \\ 1 - 2(2t-3)^2 & \text{se } 1.25 \leq t < 1.5 \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



1. Calcolare, al variare di $t \geq 0$, la probabilità di visitare tutti gli stati nell'intervallo $[0, t]$ a partire dallo stato iniziale.

2. Calcolare la distribuzione di probabilità del tempo di attesa del primo evento, ossia la funzione $P(Y_0^* \leq t)$ per ogni $t \geq 0$.