

Esercitazione di Sistemi ad Eventi Discreti - 05.05.2011

Esercizio 1

In un impianto di produzione, un piccolo magazzino può ospitare fino a un massimo di tre pezzi semi-lavorati. I pezzi semi-lavorati possono essere di due tipi (tipo 1 e tipo 2), con i pezzi di tipo 2 che pesano il doppio rispetto a quelli di tipo 1. I pezzi arrivano al magazzino secondo processi di Poisson con tassi $\lambda_1 = 4$ arrivi/ora e $\lambda_2 = 3$ arrivi/ora, rispettivamente. Se non c'è posto nel magazzino, i pezzi vengono respinti.

Un carrello elevatore preleva i pezzi dal magazzino per trasportarli alla stazione di assemblaggio. Il peso massimo che il carrello può trasportare è equivalente a tre pezzi di tipo 1. Quando il carrello arriva al magazzino, carica i pezzi disponibili in modo da massimizzare il peso trasportato, compatibilmente con il peso massimo trasportabile. Se il magazzino è vuoto, il carrello non attende l'arrivo del prossimo pezzo. Il carrello ritorna al magazzino dopo tempi aleatori che seguono una distribuzione esponenziale con valore atteso 30 minuti.

1. Modellizzare il sistema descritto mediante un automa a stati stocastico $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, f, x_0, F)$, assumendo che il magazzino sia inizialmente vuoto.
2. Calcolare la probabilità che si verifichino almeno tre arrivi di pezzi al magazzino prima dell'arrivo del carrello.
3. Noto che nel magazzino è presente solo un pezzo di tipo 2, e nessuno di tipo 1, calcolare la probabilità che, al prossimo arrivo del carrello, questo riparta a pieno carico.
4. Calcolare la probabilità che il magazzino rimanga vuoto per almeno un'ora, e nel frattempo il carrello ritorni al magazzino esattamente due volte.

Esercizio 2

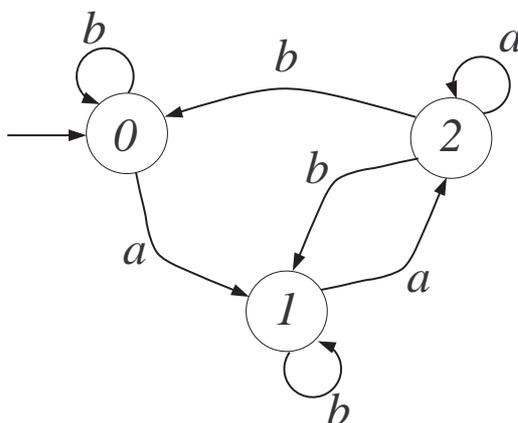
Una piccola officina dispone di due linee di riparazione, una dedicata alle automobili e una dedicata ai furgoni. Per motivi di spazio, solo la linea dedicata alle automobili può ospitare, oltre al veicolo in riparazione, anche un ulteriore veicolo in attesa di riparazione, mentre la linea dedicata ai furgoni può ospitare solo il veicolo in riparazione. Automobili e furgoni giungono all'officina come generati da processi di Poisson indipendenti con tassi $\lambda_a = 4$ arrivi/giorno e $\lambda_f = 2$ arrivi/giorno, rispettivamente. Se non c'è posto nelle rispettive linee di riparazione, i veicoli vengono dirottati su un'altra officina. I tempi di riparazione delle automobili seguono una distribuzione esponenziale con tasso $\mu_a = 3$ riparazioni/giorno, mentre i tempi di riparazione dei furgoni seguono una distribuzione esponenziale con tasso $\mu_f = 1.5$ riparazioni/giorno.

1. Modellizzare il sistema mediante un automa a stati stocastico $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, f, x_0, F)$, assumendo che l'officina sia inizialmente vuota.
2. Noto che la linea di riparazione delle automobili è piena, mentre quella di riparazione dei furgoni è vuota, calcolare la probabilità che nel corso delle due ore successive non ci siano arrivi di veicoli da riparare, ed entrambe le automobili in riparazione siano riparate.
3. Calcolare la durata media degli intervalli di tempo in cui l'officina è piena.

Esercizio 3

Si consideri l'automa a stati stocastico $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, p, x_0, F)$ rappresentato in figura, con $\mathcal{E} = \{a, b\}$ e $p(0|2, b) = 1/4$. L'evento a è caratterizzato da durate di vita deterministiche $V_a = 1.2$, mentre

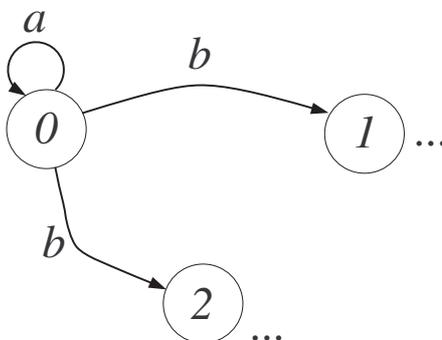
$$F_b(t) = P(V_b \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 1.0 \\ 8(t-1)^2 & \text{se } 1.0 \leq t < 1.25 \\ 1 - 2(2t-3)^2 & \text{se } 1.25 \leq t < 1.5 \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



1. Calcolare la probabilità $P(X_{k+2} = 1 \mid X_k = 2)$, dove k è il contatore del numero di eventi.
2. Calcolare, al variare di $t \geq 0$, la probabilità di visitare tutti gli stati nell'intervallo $[0, t]$ a partire dallo stato iniziale.
3. Calcolare la distribuzione di probabilità del tempo di attesa del primo evento, ossia la funzione $P(Y_0^* \leq t)$ per ogni $t \geq 0$.

Esercizio 4

Si consideri la porzione di automa a stati stocastico $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, p, x_0, F)$ riportata in figura, dove $\mathcal{E} = \{a, b\}$, $p(1|0, b) = 1/3$, $x_0 = 0$, e $F_a(\cdot)$ e $F_b(\cdot)$ sono distribuzioni uniformi negli intervalli $[0.5, 1.0]$ e $[1.5, 2.0]$, rispettivamente.



1. Calcolare la probabilità che lo stato dopo il secondo evento sia 1.
2. Calcolare il tempo medio di soggiorno nello stato 0.