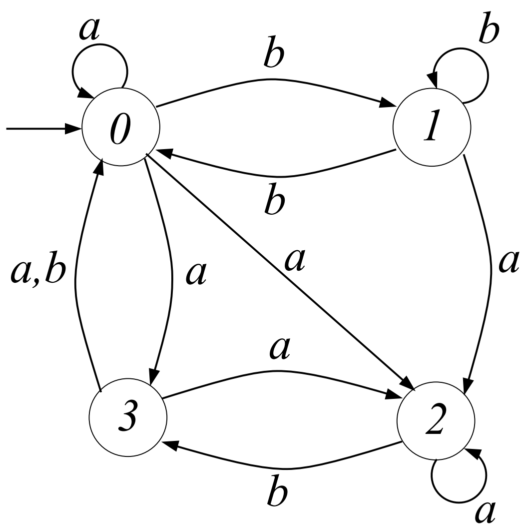
Esercitazione di Sistemi ad Eventi Discreti - 22.01.2010

Esercizio 1

Si consideri l'automa a stati stocastico $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, p, x_0, F)$ descritto in figura, con $\mathcal{E} = \{a, b\}$, $p(0|0, a) = 1/2$, $p(2|0, a) = 1/3$, $p(1|1, b) = 1/4$, F_a e F_b distribuzioni esponenziali con parametri $\lambda_a = 1$ e $\lambda_b = 2$, rispettivamente, e $P(X_{k+1} = 0|X_k = 3) = 8/9$.



1. Costruire una catena di Markov omogenea a tempo continuo che abbia comportamento stocastico equivalente all'automa dato.

Esercizio 2

Una stazione di lavorazione è costituita da un buffer con capacità unitaria e da una macchina che può lavorare un pezzo alla volta. Un pezzo lavorato può risultare difettoso con probabilità $p = \frac{1}{8}$. Un pezzo difettoso dopo la prima lavorazione, viene immediatamente rilavorato. Se risulta nuovamente difettoso, viene scartato. I pezzi arrivano alla stazione di lavorazione come generati da un processo di Poisson con tasso $\lambda = 0.25$ pezzi/minuto. Se il sistema è pieno, il pezzo in arrivo viene respinto. Le durate delle lavorazioni seguono distribuzioni esponenziali con valore atteso $\frac{1}{\mu} = 2$ minuti.

i) Modellare il sistema come una catena di Markov a tempo continuo, supponendo che la stazione di lavorazione sia inizialmente vuota.

ii) Calcolare le probabilità a regime degli stati in cui c'è un pezzo in rilavorazione.

iii) Calcolare, giustificando la risposta con la teoria, la probabilità a regime che un pezzo in arrivo venga respinto.

iv) Determinare, applicando opportunamente la Legge di Little, il tempo medio $\mathrm{E}[Z]$ che un generico pezzo trascorre nella macchina (inclusa l'eventuale rilavorazione).

Esercizio 3

In una coda $M/M/1/K$ il tasso degli arrivi è $\lambda = 1.5$ arrivi/min, mentre il tasso di servizio è $\mu = 0.5$ servizi/min. Considerare i seguenti problemi:

a) Determinare K in maniera tale che, in condizioni stazionarie, il tempo medio di soggiorno di un generico cliente nel sistema sia minimo;

b) Calcolare il minimo K che, in condizioni stazionarie, determina un tempo medio di soggiorno di un generico cliente nel sistema almeno doppio del tempo medio di servizio;

e rispondere ai seguenti quesiti:

1. Quale dei due problemi ha soluzione banale? Perché?
2. Risolvere il problema "meno banale" determinato al punto precedente.

Esercizio 4

All'uscita di una stazione di produzione modellabile come una coda di servizio $M/M/1/2$ viene posto un sensore ottico che rileva una frequenza media a regime di pezzi prodotti pari a 3 pezzi/min, mentre la durata media di una lavorazione è pari a 15 sec.

i) Determinare il tempo medio che, in situazione di regime, un pezzo deve attendere nel buffer della stazione di produzione prima di essere lavorato.

Esercizio 5

Una banca vuole determinare quanti bancomat installare all'ingresso di un centro commerciale, dove si stima che mediamente 40 clienti ogni ora intendono usare il servizio di prelievo contanti. Ogni prelievo richiede mediamente 1 minuto per essere eseguito. La banca fa pagare 2 Euro per ciascun prelievo. Osservando il comportamento dei clienti, risulta che, ogni qualvolta un cliente trova tutti i bancomat occupati, rinuncia al prelievo, rappresentando una perdita per la banca.

i) Assumendo gli arrivi dei clienti modellati da un processo di Poisson, e durate dei prelievi distribuite esponenzialmente, quanti bancomat deve prevedere la banca affinché la perdita oraria media si mantenga sotto 10 Euro?

Esercizio 6

Si consideri un server con coda per i processi in arrivo che, in prima approssimazione, può essere considerata di lunghezza infinita. Sia i tempi di interarrivo dei processi che i tempi di elaborazione nel server seguono distribuzioni esponenziali.

i) Si determini il massimo tasso λ degli arrivi dei processi per cui il valore atteso del tempo di soggiorno di un processo nel sistema non eccede a regime 2 secondi, noto che l'elaborazione di un processo richiede mediamente 1.25 secondi.