Esercitazione di Sistemi ad Eventi Discreti - 12.01.2010

Esercizio 1

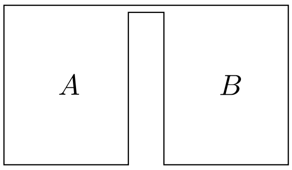
Una sorgente genera pacchetti di informazione per una rete di telecomunicazioni che trasmette a intervalli di tempo di lunghezza fissa, detti *slot*. Ogni pacchetto viene generato e trasmesso nella durata di uno slot. La sorgente alterna periodi in cui è nello stato *off* (cioè non genera pacchetti) a periodi in cui genera pacchetti (stato *on*). In questo secondo caso viene generato un pacchetto in ogni slot. Si suppone che le durate (espresse in numero di slot) degli intervalli di permanenza nei due stati *on* e *off* possano essere descritte come variabili aleatorie con distribuzione geometrica.

i) Si costruisca una catena di Markov a tempo discreto che modellizzi il comportamento della sorgente, noto che a regime la sorgente è *on* per $\frac{1}{4}$ del tempo, mentre gli intervalli di permanenza nello stato *on* hanno mediamente durata 10 slot.

Suggerimento. Se la variabile aleatoria X segue la distribuzione geometrica $P(X = n) = p\,(1-p)^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, il valore atteso di X è $\mathrm{E}[X] = \frac{1}{p}$.

Esercizio 2

In un esperimento con gas perfetti, 4 molecole di gas sono introdotte nel contenitore in figura:



A causa del movimento cinetico casuale delle molecole, queste possono passare dall'ambiente A all'ambiente B, e viceversa. Si suppone che una sola molecola alla volta può attraversare il condotto di collegamento tra i due ambienti.

i) Si modelli il sistema descritto mediante una catena di Markov omogenea a tempo discreto.

i) Si determini se esiste sempre, e in tal caso se è unico, il numero medio a regime di molecole nell'ambiente A.

Esercizio 3

Un nastro trasportatore si muove con velocità costante. Sul nastro trasportatore possono essere depositati pezzi solo a intervalli di tempo multipli del periodo $T = 45$ s. A ogni periodo, viene depositato un pezzo sul nastro trasportatore con probabilità $p = \frac{3}{4}$. I pezzi sono quindi scaricati dal nastro trasportatore da un robot *master*. In condizioni di corretto funzionamento, il robot *master* è in grado di scaricare un pezzo dal nastro trasportatore nella durata di un periodo, e rendersi quindi disponibile per il ciclo successivo. Nel manipolare il pezzo, questo può sfuggire alla presa del robot con probabilità $q = \frac{1}{8}$. In tal caso, il robot necessita di un ulteriore periodo per compiere la propria operazione, che però può nuovamente fallire con la stessa probabilità q. Nel caso di un secondo fallimento, il robot viene fermato per un tempo indefinito. Se un pezzo transita davanti al robot *master* e non può essere scaricato perché il robot è occupato, il pezzo prosegue fino a un robot *slave* che è sempre in grado di effettuare l'operazione di scarico nella durata di un periodo.

i) Mostrare che il funzionamento del robot *master* può essere rappresentato come una catena di Markov a tempo discreto, di cui si chiede di definire gli stati e la matrice P delle probabilità di transizione in un passo.

ii) La catena è irriducibile? Esiste la distribuzione stazionaria degli stati? In caso affermativo, come è fatta?

iii) Calcolare la probabilità che il robot rimanga operativo per almeno tre periodi consecutivi in condizioni di corretto funzionamento.