

Esercitazione di Sistemi ad Eventi Discreti - 19.11.2009

Esercizio 1

Una stazione di lavorazione è costituita da un buffer con capacità unitaria e da una macchina che può lavorare un pezzo alla volta. Un pezzo lavorato può risultare difettoso con probabilità $p = \frac{1}{8}$. Un pezzo difettoso dopo la prima lavorazione, viene immediatamente rilavorato. Se risulta nuovamente difettoso, viene scartato. I pezzi vengono portati uno alla volta alla stazione di lavorazione da un robot mobile dotato di braccio meccanico. Per eseguire questa operazione il robot impiega un tempo aleatorio che segue una distribuzione esponenziale con valore atteso $\frac{1}{\lambda} = 4$ minuti. L'arrivo di nuovi pezzi è sospeso quando la stazione di lavorazione è piena. Le durate delle singole lavorazioni seguono distribuzioni esponenziali con valore atteso $\frac{1}{\mu} = 2$ minuti.

- i) Modellare il sistema come un automa a stati stocastico $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, p, x_0, F)$, supponendo che la stazione di lavorazione sia inizialmente vuota.
- ii) Noto che nel sistema c'è un solo pezzo, e tale pezzo è in lavorazione per la prima volta, calcolare la probabilità che il pezzo venga scartato prima dell'arrivo di un nuovo pezzo.
- iii) Calcolare la distribuzione di probabilità del tempo Z che un generico pezzo trascorre nella macchina (inclusa l'eventuale rilavorazione).

Esercizio 2

In un ufficio postale ci sono due sportelli. Lo sportello 1 serve prioritariamente clienti che devono effettuare pagamenti (tipo A), mentre lo sportello 2 serve prioritariamente clienti che devono effettuare spedizioni (tipo B). Tuttavia, se lo sportello 1 è occupato e non ci sono clienti di tipo B in attesa, lo sportello 2 può servire un cliente di tipo A; viceversa, se lo sportello 2 è occupato e non ci sono clienti di tipo A in attesa, lo sportello 1 può servire un cliente di tipo B. I tempi di interarrivo e di servizio seguono tutti distribuzioni esponenziali. Per gli arrivi di clienti di tipo A, la frequenza media è di 14 clienti/ora, mentre per gli arrivi di clienti di tipo B la frequenza media è di 8 clienti/ora. I tempi di servizio medi non dipendono dal particolare servente, e valgono 3 minuti per i clienti di tipo A e 5 minuti per i clienti di tipo B.

- i) Fornire una definizione dell'insieme degli eventi e del vettore di stato per questo sistema, giustificando la risposta.
- ii) Calcolare il tempo medio di soggiorno nello stato in cui ci sono due clienti di tipo A nel sistema, e nessuno di tipo B.
- iii) Noto che ci sono due clienti di tipo A nel sistema, e nessuno di tipo B, calcolare la probabilità che il prossimo cliente che arriva sia di tipo B e trovi lo sportello 2 libero.
- iv) Noto che ci sono un cliente di tipo A e un cliente di tipo B nel sistema, calcolare la probabilità che in un intervallo di 4 minuti ci siano esattamente 6 arrivi di clienti, e nessuno di questi sia ammesso in servizio nello stesso intervallo.

Esercizio 3

Il call-center di una compagnia assicurativa è dotato di 10 linee telefoniche, ma solo 3 operatori (quindi i clienti collegati in numero superiore a 3 sono posti in attesa). Le telefonate dei clienti arrivano al call-center secondo un processo di Poisson con frequenza media pari a 2 chiamate/minuto. Il tempo necessario a rispondere ai quesiti di un cliente è indipendente dall'operatore, ed è distribuito secondo una distribuzione esponenziale con durata media 20 minuti. Il call-center fornisce assistenza 24 ore su 24.

- i) Modellare il sistema mediante un automa a stati temporizzato stocastico $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, f, x_0, F)$, specificando in particolare Γ , f e x_0 attraverso un diagramma di transizione.
- ii) Partendo dalla situazione di assenza di chiamate in servizio e in attesa, calcolare la probabilità che il quarto cliente debba attendere in linea prima di ricevere assistenza, ed il tempo medio di attesa in tal caso.

Esercizio 4

Un aeroporto è dotato di due piste di atterraggio di lunghezza diversa. La pista più corta (pista 1) può essere utilizzata solo per l'atterraggio di aerei di piccole dimensioni, mentre l'altra pista (pista 2) può essere utilizzata per l'atterraggio di aerei sia di piccole che di medie dimensioni. Gli aerei in arrivo inviano richieste di atterraggio alla torre di controllo e aspettano da questa il permesso all'atterraggio. La torre di controllo mette le richieste in coda e le soddisfa quando ha disponibilità. Le richieste pervenute quando ci sono già due velivoli in attesa per l'atterraggio, vengono respinte per garantire la sicurezza dello spazio aereo. Se la pista 1 è libera, una richiesta di atterraggio da parte di un aereo di piccole dimensioni viene soddisfatta anche se preceduta in coda da quella di un aereo di medie dimensioni. Quando entrambe le piste sono libere, la richiesta di un aereo di piccole dimensioni viene indirizzata verso la pista 1.

- i) Definire un opportuno vettore di stato per il sistema, che tenga conto sia della situazione delle piste che degli aerei in attesa per l'atterraggio. Che cardinalità ha l'insieme degli stati del sistema? Definire inoltre un opportuno insieme degli eventi per il sistema.

Supporre quindi che le richieste di atterraggio da parte di aerei di piccole e medie dimensioni arrivino come generate da processi di Poisson con tassi 3 arrivi/ora e 2 arrivi/ora, rispettivamente, mentre i tempi di atterraggio dei due tipi di aerei seguono distribuzioni esponenziali con valori attesi 15 minuti e 20 minuti, rispettivamente.

- ii) Calcolare la probabilità che entrambe le piste si mantengano libere per almeno 30 minuti.
- iii) Noto che entrambe le piste sono impegnate e nella pista 2 sta atterrando un aereo di medie dimensioni, mentre in attesa ci sono nell'ordine un aereo di medie e uno di piccole dimensioni, calcolare la probabilità che l'aereo di piccole dimensioni sia ammesso all'atterraggio prima dell'aereo di medie dimensioni.
- iv) Calcolare la probabilità che esattamente tre aerei non siano ammessi in coda dalla torre di controllo mentre la coda è saturata con almeno un aereo di piccole dimensioni in attesa, entrambe le piste sono impegnate e in particolare nella pista 2 sta atterrando un aereo di piccole dimensioni.