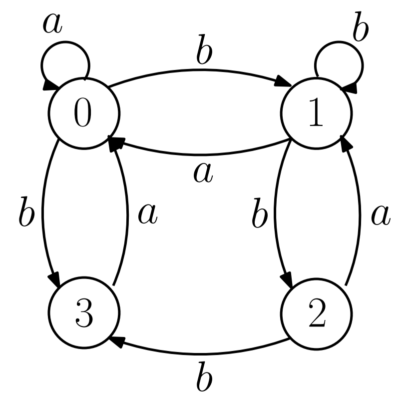
Esame straordinario di Sistemi a Eventi Discreti - 12.11.2014

Esercizio 1

Si consideri l'automa temporizzato stocastico $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, p, p_0, F)$ rappresentato in figura. E' noto che $p(1|0,b) = 1/3$ e $p(1|1,b) = 1/2$. Inoltre, tutti gli stati sono inizialmente equiprobabili. Le durate di vita dell'evento a sono deterministiche e pari a $t_a = 2$ minuti, mentre quelle dell'evento b seguono una distribuzione esponenziale con valore atteso pari a un minuto.

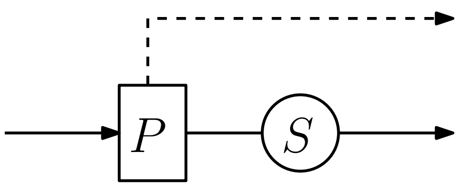


1. Determinare lo stato più probabile dopo il primo evento.

2. Determinare la distribuzione di probabilità del tempo di soggiorno nello stato iniziale $X_0 = 2$.

Esercizio 2

Si consideri la coda di servizio rappresentata in figura e costituita da un servente S preceduto da uno spazio di attesa P di capacità unitaria. Quando la coda è piena, eventuali clienti in arrivo vengono respinti. I clienti arrivano come generati da un processo di Poisson con tasso 1.5 arrivi/ora. I tempi di servizio in S seguono una distribuzione esponenziale con valore atteso 30 minuti. Ciascun cliente in attesa in P è disposto ad attendere di essere servito un tempo massimo che segue una distribuzione esponenziale con valore atteso 45 minuti. Al termine del suo massimo tempo di attesa, il cliente decide di andarsene rinunciando al servizio.



1. Modellizzare il sistema descritto mediante una catena di Markov omogenea a tempo continuo.

2. Verificare la condizione $\lambda_{eff} = \mu_{eff}$ per il sistema a regime.

3. Calcolare il tempo medio trascorso a regime da un generico cliente in P.

4. Calcolare il numero medio di clienti che, a regime, lasciano il sistema nell'unità di tempo senza essere serviti.

Esercizio 3

Un giocatore gioca al seguente gioco. A ogni giocata, lancia due dadi non truccati. Se la somma dei risultati è compresa tra 1 e 4, perde 1€. Se la somma dei risultati è compresa tra 9 e 12, vince 1€. Altrimenti, mantiene il suo capitale. Il giocatore decide di smettere di giocare nel momento in cui ha perso 2€ o ha vinto 3€ rispetto al suo capitale iniziale, che è maggiore di 2€.

1. Calcolare la probabilità che il giocatore vinca 3€ rispetto al suo capitale iniziale in al massimo cinque giocate.
2. Calcolare la probabilità che il giocatore vinca 3€ rispetto al suo capitale iniziale in esattamente cinque giocate.
3. Calcolare la probabilità che il giocatore abbia vinto 3€ rispetto al suo capitale iniziale quando smette di giocare.
4. Calcolare la probabilità che il giocatore non decrementi mai il suo capitale.