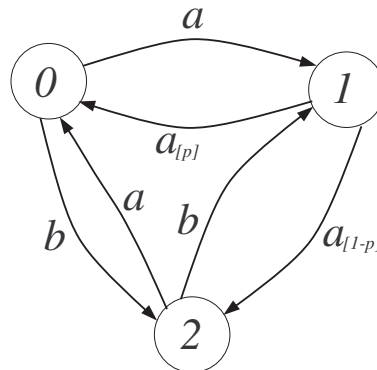


**Esercizio 1**

Si consideri l'automa temporizzato stocastico il cui grafo di transizione è rappresentato in figura.

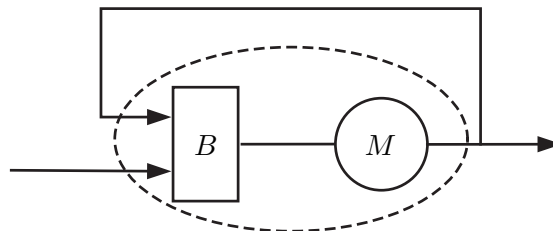


Le durate di vita dell'evento  $a$  seguono una distribuzione esponenziale con tasso  $\lambda = 0.2$  eventi/minuto, mentre le durate di vita dell'evento  $b$  sono deterministiche e uguali a 4 minuti. Lo stato iniziale è  $x_0 = 0$  e la probabilità di transizione  $p$  vale  $1/4$ .

1. Calcolare  $P(X_2 = x)$  per ogni  $x \in \{0, 1, 2\}$ .

**Esercizio 2**

Si consideri il sistema di produzione rappresentato in figura:



e costituito da una macchina  $M$  preceduta da un magazzino  $B$  di capacità unitaria. Le parti che entrano nel sistema devono essere lavorate esattamente due volte in  $M$ . Al termine della prima lavorazione di una parte, se non c'è un'altra parte in attesa in  $B$ , viene subito iniziata la seconda lavorazione. Altrimenti, la parte appena lavorata viene posta in attesa in  $B$  e la parte precedentemente in attesa in  $B$  viene ammessa in  $M$ . Le parti arrivano al sistema come generate da un processo di Poisson con tempo medio di interarrivo 10 minuti. Le durate delle lavorazioni nella macchina seguono distribuzioni esponenziali con tassi  $\mu_1 = 0.25$  servizi/minuto per la prima lavorazione e  $\mu_2 = 0.15$  servizi/minuto per la seconda lavorazione.

1. Modellizzare il sistema mediante un automa temporizzato stocastico.
2. Noto che in  $B$  è presente una parte che deve essere lavorata per la prima volta e in  $M$  viene lavorata una parte per la seconda volta:
  - (a) calcolare la probabilità che il sistema si svuoti e nel frattempo non vengano accettate altre parti nel sistema;

- (b) calcolare la probabilità che in un tempo  $T = 10$  minuti il sistema si svuoti e nel frattempo non vengano accettate altre parti nel sistema. *Nota:* E' sufficiente impostare i calcoli.
3. Verificare la condizione  $\lambda_{eff} = \mu_{eff}$  per il sottosistema  $\Sigma$  racchiuso dalla curva tratteggiata.
  4. Verificare la legge di Little per il sottosistema costituito dalla sola macchina  $M$ .

### Esercizio 3

In un'urna che può contenere al massimo cinque palline, vengono inserite due palline gialle e una pallina verde. A ogni estrazione, se la pallina estratta è gialla, viene tolta dall'urna e si procede a una nuova estrazione; altrimenti, se la pallina estratta è verde, viene reinserita nell'urna e con probabilità  $p = 2/3$  si aggiunge nell'urna una nuova pallina gialla. Le estrazioni hanno termine quando non ci sono più palline gialle oppure l'urna è piena.

1. Modellizzare il gioco mediante una catena di Markov omogenea a tempo discreto.
2. Calcolare la probabilità che dopo dieci estrazioni il gioco non sia ancora terminato.
3. Calcolare la durata media del gioco (intesa in numero di estrazioni).
4. Calcolare la probabilità che, durante il gioco, non siano mai presenti quattro palline nell'urna.