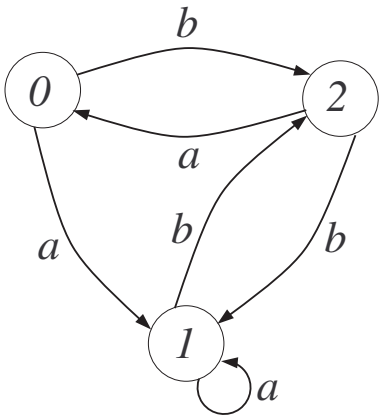
Esame di Sistemi a Eventi Discreti - 25.06.2014

Studente: _____

Esercizio 1

Si consideri l'automa temporizzato il cui grafo di transizione è rappresentato in figura.



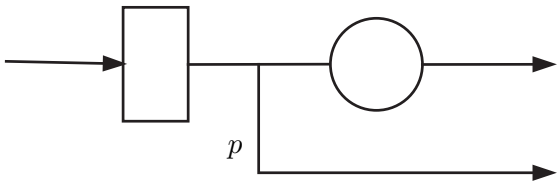
Le durate di vita degli eventi a e b sono costanti e pari a V_a e V_b, rispettivamente. Lo stato iniziale è $x_0 = 0$. Si ponga $V_a = 4$.

1. Determinare la condizione su V_b affinché la prima occorrenza di b sia al terzo evento e il primo tempo di soggiorno nello stato $x = 2$ sia superiore a $t = 3$.

2. Posto $V_b = 5$, determinare la frazione di tempo spesa in ciascuno stato su un orizzonte temporale $T = 40$. Si assuma che l'evento b abbia priorità sull'evento a in caso di accadimento simultaneo.

Esercizio 2

Si consideri il sistema di produzione rappresentato in figura:



e costituito da una macchina preceduta da un magazzino di capacità unitaria. Prima di entrare nella macchina per la lavorazione, le parti vengono ispezionate e scartate se difettose. La probabilità che una parte sia difettosa è $p = 1/8$. In prima approssimazione, si supponga che l'ispezione di una parte abbia durata trascurabile. Le parti arrivano al sistema come generate da un processo di Poisson con tempo medio di interarrivo 5 minuti. Le durate delle lavorazioni nella macchina seguono una distribuzione esponenziale con tasso $\mu = 0.25$ servizi/minuto.

1. Modellizzare il sistema mediante un automa temporizzato stocastico.

2. Noto che il sistema è pieno, calcolare la probabilità che il sistema si svuoti e nel frattempo non avvenga alcun arrivo.

3. Noto che il sistema è pieno, calcolare la probabilità che in un tempo $T = 15$ minuti il sistema si svuoti e nel frattempo non avvenga alcun arrivo.

4. Verificare la condizione $\lambda_{eff} = \mu_{eff}$ per il sistema a regime.

5. Verificare la legge di Little per il sottosistema costituito dalla sola macchina.

Esercizio 3

In un esperimento nucleare, un neutrone viene introdotto in un reattore contenente materiale fissile (generazione 0). Quando il neutrone colpisce un nucleo, viene generato un numero casuale di nuovi neutroni (generazione 1). Questo processo continua con ciascun neutrone nella generazione i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, che si comporta come il neutrone originale. Per evitare l'esplosione della reazione, vengono continuamente inserite e rimosse dal reattore delle sbarre metalliche che assorbono neutroni, e quindi servono a mantenere il numero di neutroni nel reattore limitato. Per semplicità di modellizzazione, si assuma che ciascun neutrone possa originare al più un solo nuovo neutrone da una generazione alla successiva con probabilità p. Inoltre, per simulare l'azione delle sbarre metalliche, si assuma che, quando il numero di neutroni nel reattore eccede N, esattamente N neutroni vengono istantaneamente rimossi dal reattore. Si fissino $p = 2/5$ e $N = 4$.

1. Modellizzare il processo che avviene nel reattore mediante una catena di Markov omogenea a tempo discreto.

2. Calcolare la probabilità che alla quinta generazione nel reattore sia presente il numero massimo di neutroni.

3. Calcolare il numero medio di neutroni nel reattore a regime.

4. Calcolare il numero medio di generazioni necessarie per raggiungere il numero massimo di neutroni nel reattore partendo dalla situazione con un solo neutrone.