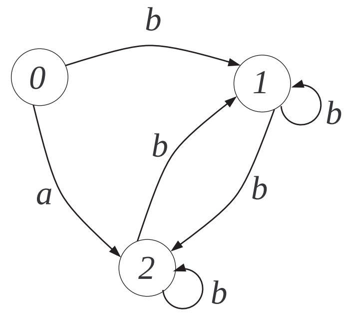
Esame di Sistemi a Eventi Discreti - 25.09.2013

Studente: ______________________________

Esercizio 1

Si consideri l'automa a stati stocastico il cui grafo di transizione è rappresentato in figura.



E' noto che le durate di vita dell'evento a seguono la densità di probabilità triangolare

$$f_a(x) = \begin{cases} \frac{2}{15}(x-2) & \text{se } 2 \leq x \leq 5 \\ \frac{2}{5} - \frac{1}{5}(x-5) & \text{se } 5 < x \leq 7 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

le durate di vita dell'evento b sono costanti e pari a $V_b = 3$, e infine $p(1|1,b) = p(1|2,b) = 3/4$.

1. Calcolare la probabilità $P(X_2 = 2 | X_0 = 0)$.
2. Calcolare il tempo medio di soggiorno nello stato $X = 1$.

Suggerimento. Si ricordi che, per $|x| < 1$, risulta $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ e $\sum_{k=1}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$.

Esercizio 2

Un'officina per la produzione di componenti per auto è costituita da una stazione di lavorazione (L) con servente singolo, il cui tempo di servizio segue una distribuzione esponenziale con tasso μ_L. Al momento di entrare nel sistema, ciascun pezzo grezzo viene montato su un pallet in una stazione di carico e scarico (C/S) monoservente. Il pezzo viene quindi trasportato alla stazione L, dove viene lavorato secondo una disciplina First-Come First-Served (FCFS). Dopo la lavorazione, il pezzo torna alla stazione C/S, dove viene smontato dal pallet secondo una disciplina FCFS. Sul pallet viene immediatamente montato un nuovo pezzo grezzo. Si assume che i tempi per il trasporto dei pezzi siano trascurabili. Si assume inoltre che il tempo di operazione della stazione C/S è anch'esso distribuito esponenzialmente con tasso $\mu_{C/S} = 10$ pezzi/ora. Il numero di pallet nel sistema è $N = 3$.

1. Quanto deve valere μ_L affinché il sistema a regime produca mediamente 6 pezzi/ora?

Esercizio 3

Il modello di Moran descrive la dinamica di una popolazione di cellule di due tipi A e a, che è mantenuta a un numero costante N. A ciascun passo, viene selezionata una cellula a caso (scelta del tipo) e aggiunta una cellula dello stesso tipo. Subito dopo, viene nuovamente selezionata a caso una cellula e rimossa. Si assuma $N = 6$. Si assuma, inoltre, che inizialmente la popolazione sia composta da un uguale numero di cellule dei due tipi.

1. Modellizzare la dinamica della popolazione mediante una catena di Markov omogenea a tempo discreto.

2. Calcolare la probabilità di avere due cellule di tipo A dopo cinque passi.

3. Calcolare la probabilità che la popolazione di tipo a si estingua.

4. Calcolare il tempo medio perché una delle due popolazioni si estingua.