Esame Straordinario di Sistemi ad Eventi Discreti - 26.04.2012

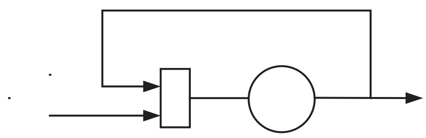
Esercizio 1

Un dispositivo hardware può trovarsi in quattro stati. Nello stato *busy* il dispositivo è acceso e in funzione (esegue un task). Nello stato *idle* il dispositivo è acceso ma non in funzione. Nello stato *stand-by* il dispositivo è in stato di sospensione, durante il quale non assorbe potenza. Nello stato *re-start* il dispositivo viene riavviato. Quando il dispositivo è *busy*, va in stato *idle* al termine dell'esecuzione del task. Nello stato *idle*, il dispositivo è pronto per eseguire un nuovo task quando ne arrivi richiesta (la messa in esecuzione si assume istantanea al momento dell'arrivo della richiesta), a meno che nel frattempo venga messo in *stand-by*. Quando il il dispositivo è in *stand-by* e arriva la richiesta di eseguire un task, il dispositivo viene riavviato (*re-start*), e al termine del riavvio va direttamente in stato *busy*. Si suppone che in stato *idle* la richiesta di esecuzione di un nuovo task arrivi dopo un tempo che segue una distribuzione esponenziale con tasso $\lambda = 0.8$ arrivi/ora, mentre il dispositivo viene messo in *stand-by* dopo un tempo che segue una una distribuzione esponenziale con tasso μ sospensioni/ora. La potenza assorbita dal dispositivo in stato *idle* è 1.2 kW, mentre l'energia assorbita per il *re-start* è 0.4 kWh.

1. Determinare il tasso μ in maniera tale da minimizzare il tempo medio per la messa in esecuzione di un task al ricevimento di una richiesta, soggetto al vincolo che l'energia media consumata tra quando il dispositivo lascia lo stato *busy* e quando vi ritorna non superi 1 kWh.

Esercizio 2

Si consideri la stazione di lavorazione rappresentata in figura, e costituita da uno spazio di accodamento di capacità unitaria seguito da una singola macchina.



Un pezzo lavorato nella macchina necessita di una ulteriore rilavorazione con probabilità $p = 1/8$. In tal caso, il pezzo viene di nuovo accodato, in attesa di essere rilavorato. I pezzi arrivano alla stazione come generati da un processo di Poisson con tasso 2 arrivi/min, mentre le lavorazioni nella macchina hanno durate che seguono una distribuzione esponenziale con tasso 2.5 servizi/min.

1. Dimostrare che, definendo come stato il numero di pezzi nella stazione di lavorazione, il modello del sistema è analogo a quello di una coda M/M/1/2, della quale si chiede di fornire i parametri.

2. Sfruttando la definizione della situazione di regime e la legge di Little, calcolare il numero medio di lavorazioni che un generico pezzo subisce a regime prima di uscire dal sistema.

Esercizio 3

Si consideri un singolo nucleotide in un filamento di DNA. Questo può avere una base purinica (adenina e guanina) o pirimidinica (citosina e timina). Una variante del modello di Jukes-Cantor delle mutazioni del DNA afferma che, tra un'osservazione e l'altra, la base di un nucleotide possa mutare con probabilità $\rho \in (0, 1)$, trasformandosi con probabilità 1/2 nell'altra base della stessa famiglia, e probabilità 1/4 in ciascuna base dell'altra famiglia.

1. Determinare il tipo di base più probabile a regime al variare di ρ.

Si ponga $\rho = 1/3$.

2. Calcolare la probabilità che un'adenina non si trasformi (né direttamente né indirettamente) in una pirimidina nell'arco delle prime quattro osservazioni.

3. Calcolare il numero medio di osservazioni trascorso il quale un'adenina ritorna a essere tale dopo essersi modificata.