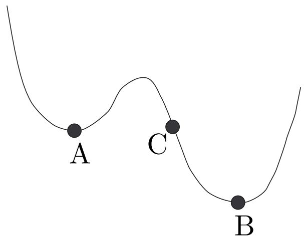
I prova in itinere ed esame di Sistemi ad Eventi Discreti - 18.11.2011

Esercizio 1 (tutti)

Una molecola ha due stati di equilibrio (si veda la figura), uno ad alto (stato A) e uno a basso (stato B) potenziale, e può passare da uno stato di equilibrio all'altro a causa di perturbazioni esterne (per esempio, la variazione di un campo elettrico esterno). Quando la molecola si trova nello stato A, una perturbazione esterna (evento a) è sufficiente a farla passare nello stato B. Viceversa, quando la molecola si trova nello stato B, il passaggio allo stato A avviene in due passi. Una prima perturbazione (evento b) porta la molecola nello stato intermedio C. Dallo stato C la molecola può salire ulteriormente verso lo stato A se un nuovo evento b accade prima di un fissato tempo di decadimento t_d, trascorso il quale, altrimenti, la molecola ritorna nello stato B.



1. Modellizzare il funzionamento logico del sistema descritto mediante un automa a stati, considerando come stato iniziale lo stato ad alto potenziale.

2. Date le seguenti sequenze di temporizzazione per gli eventi a e b, espresse in ms: $V_a = \{1.0, 1.2, \ldots\}$, $V_b = \{0.8, 0.6, 0.5, 0.7, 0.8, 0.5, \ldots\}$, e considerando un intervallo temporale di 5.0 ms dall'istante iniziale, determinare il massimo valore del tempo di decadimento t_d tale che il tempo trascorso dalla molecola nello stato B non scende sotto il 70% dell'intervallo (considerare che per $t_d = 0$ il tempo trascorso in B è massimo, e diminuisce al crescere di t_d...).

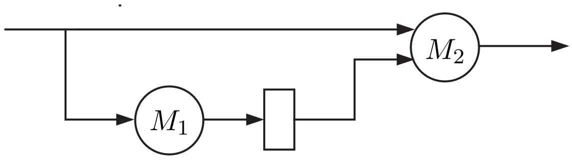
Si supponga $t_d = 1.0$ ms, e che le durate di vita degli eventi a e b seguano distribuzioni esponenziali con tassi $\lambda_a = 1.1$ e $\lambda_b = 0.8$ eventi/ms, rispettivamente.

3. Noto che la molecola è appena entrata nello stato C, calcolare la probabilità che essa ritorni nello stato B senza passare dallo stato A.

4. Calcolare la probabilità che la molecola ritorni nello stato B entro 2 ms passando dallo stato A.

Esercizio 2 (tutti)

Si consideri la stazione di lavorazione rappresentata in figura.



I pezzi in arrivo possono richiedere con probabilità $p = 1/3$ una pre-lavorazione in M_1, altrimenti vanno direttamente in lavorazione in M_2. Quando un pezzo arriva e la macchina a cui è destinato non è libera, viene respinto. A valle della macchina M_1 è presente un buffer di capacità unitaria. Quando M_1 termina la pre-lavorazione di un pezzo e M_2 è occupata, il pezzo pre-lavorato viene trasferito nel buffer se questo è vuoto. Altrimenti, il pezzo viene trattenuto da M_1, che quindi non si rende disponibile per una nuova lavorazione fino a quando termina la lavorazione in M_2. I pezzi arrivano alla stazione di lavorazione come generati da un processo di Poisson con tempo medio di interarrivo pari a 5 minuti, mentre i tempi di lavorazione in M_1 e M_2 seguono distribuzioni esponenziali con tassi $\mu_1 = 0.5$ servizi/minuto e $\mu_2 = 0.8$ servizi/minuto, rispettivamente.

1. Modellizzare la stazione di lavorazione mediante un automa a stati stocastico, assumendo che essa sia inizialmente vuota.

2. Noto che M_1 è libera, e il buffer e M_2 sono occupati, calcolare la probabilità che i due pezzi presenti nel sistema escano dal sistema stesso prima che altri pezzi vengano ammessi.

Solo prova in itinere:

3. Noto che M_1 è occupata, e il buffer e M_2 sono liberi, calcolare il tempo medio di attesa che M_2 cominci una lavorazione.

4. Calcolare la probabilità che il primo pezzo in arrivo richieda la pre-lavorazione in M_1, e quando questa termina non debba aspettare per la lavorazione in M_2.

Solo esame completo:

3. Calcolare il numero medio di pezzi nel sistema a regime.

4. Verificare la Legge di Little per il sistema Σ costituito dalla sola macchina M_1, calcolando indipendentemente le quantità λ_Σ, $\mathrm{E}[X_\Sigma]$ e $\mathrm{E}[S_\Sigma]$.

Esercizio 3 (solo esame completo)

Un semplice modello di previsioni meteo fissa in 0.5 e 0.7 le probabilità di pioggia dopo un solo giorno e dopo due giorni di pioggia, rispettivamente. La probabilità di pioggia dopo due giorni senza pioggia è 0.2, mentre la probabilità di pioggia dopo un solo giorno senza pioggia è 0.4.

1. Costruire una catena di Markov a tempo discreto per il modello di previsioni meteo sopra descritto.

2. Noto che è domenica e non piove da un settimana, calcolare la probabilità che mercoledì piova.

3. Calcolare la frazione media di giorni senza pioggia a regime.