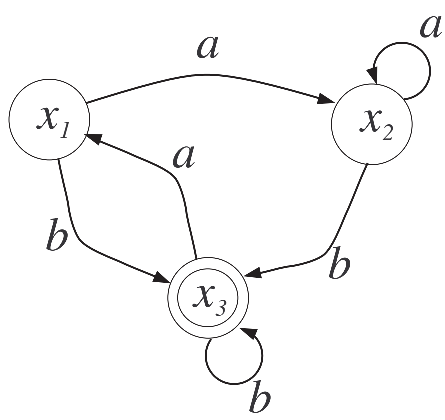
Esame di Sistemi ad Eventi Discreti - 10.11.2010

Esercizio 1

Si consideri l'automa a stati finiti $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, f, x_0, \mathcal{F})$ sull'alfabeto $\mathcal{E} = \{a, b\}$ rappresentato in figura, dove lo stato iniziale x_0 non è inizialmente specificato.



1. Posto $x_0 = x_1$, determinare il linguaggio regolare riconosciuto dall'automa.
2. Rispondere alla stessa domanda del punto 1 con $x_0 = x_2$.
3. Solo sulla base di quanto determinato ai punti 1 e 2, è possibile stabilire se gli stati x_1 e x_2 sono equivalenti? Perché?

Esercizio 2

Da una stazione di autobus, transitano le corriere numero 1 e 2. Le corriere arrivano come generate da processi di Poisson indipendenti, caratterizzati da tempi medi di interarrivo pari a 45 minuti e un'ora, rispettivamente. Ogni corriera ha una capienza di 15 posti. Una corriera in arrivo si ferma, carica eventuali passeggeri in attesa e riparte. In prima approssimazione, si assume che la durata della fermata sia trascurabile. I passeggeri dei due tipi di corriere si presentano alla stazione anch'essi come generati da processi di Poisson, indipendenti tra loro e dai processi di arrivo delle corriere. I due processi hanno frequenza media 20 arrivi/ora e 15 arrivi/ora, rispettivamente. La stazione apre alle 6:00 del mattino, e a quell'ora non ci sono né passeggeri né corriere presenti.

1. Fornire una descrizione del sistema mediante un automa a stati stocastico $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, f, x_0, F)$.
2. Calcolare il numero totale medio di passeggeri presenti nella stazione al momento dell'arrivo della generica prima corriera.
3. Calcolare la probabilità che la prima corriera numero 1 in arrivo non riesca a caricare tutti i passeggeri in attesa.
4. Calcolare la durata media dell'attesa di un generico passeggero della corriera numero 2.

Esercizio 3

Una CPU è formata da due processori identici in parallelo. Durante un intervallo di *clock*, può arrivare alla CPU al più un nuovo *job* per l'esecuzione[1], e questo avviene con probabilità α. Se almeno un processore è libero, il job viene eseguito, altrimenti viene perso. Quando un processore è occupato, la probabilità che esso termini il job in esecuzione è β in ciascun intervallo di clock.

1. Modellare lo stato di occupazione della CPU mediante una catena di Markov a tempo discreto omogenea.

2. Posto $\alpha = 1/2$, determinare il valore di β tale che il tempo medio di ricorrenza degli stati con un solo processore occupato e con due processori occupati sia identico.

3. Con i valori di α e β del punto 2, calcolare la probabilità che entrambi i processori rimangano contemporaneamente occupati per almeno 10 intervalli di clock.

[1] *Suggerimento:* si intenda, per semplicità, che l'arrivo di un nuovo job avviene al termine dell'intervallo di clock.