Esame di Sistemi ad Eventi Discreti - 23.07.2010

Esercizio 1

Si consideri il linguaggio $\mathcal{L} = \bigcup_{n=0}^{\infty} u_n$ sull'alfabeto $\mathcal{E} = \{a, b\}$, dove le stringhe u_n sono costruite ricorsivamente nel seguente modo:

$$\begin{cases} u_0 = \varepsilon \\ u_1 = ab \\ u_{2k} = u_{2k-1}a, \ k = 1, 2, \ldots \\ u_{2k+1} = u_{2k}b, \ k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

1. Dimostrare se il linguaggio $\mathcal{L}$ è un linguaggio regolare. In caso affermativo, determinare un'espressione regolare che descrive $\mathcal{L}$.

Esercizio 2

Si consideri la stazione di lavorazione rappresentata in Figura 1, composta da due macchine M_1 e M_2 e priva di spazio di accodamento.

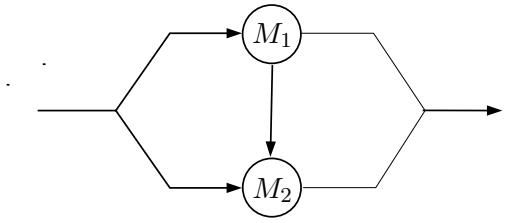

Figura 1: Stazione di lavorazione.

La macchina M_1 è più veloce della macchina M_2 (M_1 e M_2 hanno frequenza media di servizio $\mu_1 = 4$ pezzi/ora e $\mu_2 = 1$ pezzo/ora, rispettivamente), ma mentre M_2 ha un'affidabilità del 100%, M_1 ha un'affidabilità solo dell'80% (cioè il 20% delle lavorazioni non viene terminata con successo). Nel caso in cui M_1 termini una lavorazione senza successo, il pezzo viene inviato per la rilavorazione a M_2, se questa è disponibile. Altrimenti, M_1 trattiene il pezzo fino a quando M_2 si libera. Un pezzo in arrivo quando sia M_1 che M_2 sono libere, viene indirizzato verso M_1 con probabilità $p = 2/3$, mentre quando sia M_1 che M_2 sono occupate, il pezzo in arrivo viene scartato.

1. Modellare la stazione di lavorazione mediante un automa a stati $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, p, x_0)$, assumendo che la stazione di lavorazione sia inizialmente vuota.

2. Supponendo che gli arrivi di pezzi e le lavorazioni nelle due macchine abbiano durate costanti, determinare la condizione sulla frequenza degli arrivi λ affinché sia non nulla la probabilità che dopo il secondo evento M_1 sia libera e M_2 sia operativa. Quanto vale tale probabilità?

3. Supponendo che gli arrivi di pezzi e le lavorazioni nelle due macchine abbiano durate che seguono una distribuzione esponenziale, e assumendo una frequenza media degli arrivi $\lambda =$ 2 pezzi/ora:

   (a) calcolare la probabilità che il secondo pezzo in arrivo sia lavorato solo in M_2;

   (b) calcolare l'utilizzazione a regime di M_1;

   (c) verificare la condizione di bilanciamento dei flussi a regime (cioè, $\lambda_{\text{eff}} = \mu_{\text{eff}}$).

Esercizio 3

Un mazzo di 10 carte è composto da 5 carte rosse e 5 carte nere. Le carte vengono estratte ad una ad una senza rimpiazzo, e prima di ogni estrazione un giocatore tenta di indovinare il colore della carta che verrà estratta. Se indovina, vince 1 Euro.

1. Indicando con $X(t)$ la somma vinta dal giocatore dopo t estrazioni, valutare, motivando la risposta, se il processo stocastico $\{X(t)\}$ è una catena di Markov a tempo discreto omogenea.

2. In caso di risposta negativa al punto precedente, fornire, motivando la risposta, una definizione di stato che permetta di modellare il gioco mediante una catena di Markov a tempo discreto omogenea.