Esame di Sistemi ad Eventi Discreti - 26.02.2010

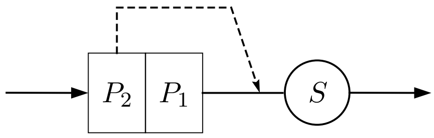
Esercizio 1 (esame completo/recupero prima parte)

In un laboratorio di ceramiche un forno, inizialmente spento, consente di cuocere il vasellame con due diverse modalità. Nella prima modalità si producono ceramiche ad alta temperatura: l'inizio e il completamento di una lavorazione di questo tipo è indicato dagli eventi a_1 (accensione ad alta temperatura) e b (spegnimento). Nella seconda modalità si producono ceramiche a bassa temperatura: l'inizio e il completamento di una lavorazione di questo tipo è indicato dagli eventi a_2 (accensione a bassa temperatura) e b. Inoltre, una volta iniziata una lavorazione a bassa temperatura l'operatore ha la possibilità, azionando un pulsante (evento c) di fornire al forno ulteriore energia; ciò fa aumentare la temperatura fino a raggiungere una soglia (evento d) che porta ugualmente ad una condizione di lavorazione ad alta temperatura.

1. Modellare il funzionamento del forno mediante un automa a stati finiti con minimo numero di stati che accetti solo le sequenze di operazioni che sono ammissibili e complete (cioè iniziano e terminano con forno spento).

Esercizio 2 (solo recupero prima parte)

Si consideri la coda di servizio rappresentata in figura, e costituita da uno sportello S preceduto da uno spazio di accodamento con due posti P_1 e P_2. Quando la coda è piena e termina il servizio allo sportello S, con probabilità $p = 1/4$ il cliente in attesa nel posto P_2 viene ammesso al servizio prima del cliente in P_1 ("sorpasso"). Un cliente che arriva quando la coda è piena, non viene ammesso nella coda. Si assuma che i clienti arrivino come generati da un processo di Poisson con parametro $\lambda = 0.1$ arrivi/min, e che le durate dei servizi allo sportello S seguano una distribuzione esponenziale con tasso $\mu = 0.2$ servizi/min, rispettivamente.



1. Modellare la coda di servizio mediante un automa a stati stocastico $(\mathcal{E}, \mathcal{X}, \Gamma, p, x_0, F)$, assumendo inizialmente la coda vuota.

2. Noto che la coda è piena e che lo sportello S sta servendo un cliente che non ha effettuato "sorpassi", calcolare la probabilità che il cliente in attesa nel posto P_1 venga "sorpassato" esattamente due volte prima di essere ammesso al servizio.

3. Noto che la coda è piena e che lo sportello S sta servendo un cliente che non ha effettuato "sorpassi", calcolare la probabilità che dopo il prossimo evento lo sportello S stia servendo un cliente che non ha effettuato "sorpassi".

4. Determinare la distribuzione di probabilità del tempo di soggiorno in uno stato in cui lo sportello S è occupato e un solo cliente è in attesa.

Esercizio 3 (esame completo/recupero seconda parte)

Si consideri la descrizione della coda di servizio nell'Esercizio 2.

1. Modellare la coda di servizio mediante una catena di Markov omogenea a tempo continuo, assumendo inizialmente la coda vuota.
2. Calcolare, a regime, la frequenza media di clienti effettivamente ammessi nella coda.
3. Calcolare, a regime, il valore atteso del tempo trascorso da un generico cliente nel posto P_2 (*Nota:* indipendentemente dal fatto se, una volta lasciato P_2, egli si sposti in P_1 o direttamente in S).

(solo esame completo)

4. Calcolare la probabilità richiesta al punto 2 dell'Esercizio 2.

Esercizio 4 (esame completo/recupero seconda parte)

Due robot mobili esplorano un corridoio chiuso che è il perimetro di un ottagono regolare di lato $\ell = 60$ m. I due robot si spostano alla medesima velocità costante $v = 1$ m/sec, e ogni volta che raggiungono un vertice del perimetro, decidono ciascuno con probabilità $p = 1/2$ e indipendentemente l'uno dall'altro se invertire il senso di marcia. Inizialmente i due robot mobili si trovano su vertici opposti dell'ottagono. Si indichi con $X(t)$ il numero minimo di lati che separa i due robot mobili agli istanti $t = 0, 1, 2, \ldots$ min.

1. Modellare l'evoluzione di $X(t)$ mediante una catena di Markov omogenea a tempo discreto.
2. Calcolare la densità di probabilità discreta di $X(4)$.
3. Calcolare la probabilità che i due robot, una volta incontratisi su uno stesso vertice, si muovano affiancati per esattamente 3 min.
4. Determinare dopo quanto tempo mediamente a regime i due robot mobili si incontrano di nuovo dopo essersi separati.